Gianluca Cappa

Le proprietà del triangolo di Tartaglia e la succesione di Fibonacci

UN PO' DI STORIA

La vita di Niccolò Tartaglia

Tartaglia è il soprannome di Niccolò FONTANA (Brescia 1499 - Venezia 1557).

Il soprannome gli venne dato per un difetto di pronuncia causatogli da una ferita riportata al viso durante il saccheggio di Brescia nel 1512.

Insegnò a Verona, Mantova e a Venezia. Oltre al triangolo, che porta anche il suo nome, il matematico ebbe altre intuizioni: nel 1535 risolvendo dei problemi di terzo grado (equazioni di 3° grado) riuscì a trovare una soluzione sempre valida cioè:

$$x^3+px+q.$$

Nel 1546 comparve l'opera più importante di Tartaglia dal titolo "*Quesiti et invenzioni diverse*", in quest'opera sono risolti problemi di balistica meccanica fabbricazioni di esplosivi ma l'argomento principale rimane l'algebra.

Nel 1560 venne stampato il suo "*General trattato di numeri et misure*" opera enciclopedica di matematica elementare dove si trova anche il famoso TRIANGOLO.

Gli si deve in oltre la prima traduzione in volgare degli *Elementi di Euclide.*

COEFFICIENTI BINOMIALI

Gli elementi del triangolo di Tartaglia sono detti coefficienti binomiali poiché coincidono con i coefficienti delle potenze di un bionomio.

Riga		Sviluppo delle potenze del binomio: $(a+b)^n$
0	1	$(a+b)^0 = 1$
1	1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b = a + b$
2	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
3	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b +3ab^2 + 1b^3$
4	1 4 6 4 1	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 +4ab^3 + 1b^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 +10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
6	1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$
...	....	....

Ogni elemento del triangolo si può individuare con due numeri ovvero il numero di riga ed il numero di posto (il numero di posto può essere al massimo uguale al numero di riga +1), per questo si può rappresentare con il simbolo:

$$\binom{n}{k}$$

detto proprio coefficiente binomiale di n su k, dove n rappresenta la riga e k il posto.

Esempio: $\binom{5}{3} = 10$

Con questi simboli il triangolo di Tartaglia si può riscrivere nel seguente modo:

$$\binom{1}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se si vuole, però calcolare ad esempio $\binom{70}{15}$ si dovrebbe sviluppare il triangolo di Tartaglia fino alla riga n°70 e prendere l'elemento di posto 15.
Questo non è necessario in quanto i coefficienti binomiali si possono calcolare direttamente tramite la formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

dove il simbolo n! si legge "enne fattoriale" e sta ad indicare il prodotto dei numeri naturali fino ad n, cioè:

$$n! = 1*2*3*4*.....*(n-1)*n$$

Esempio: $5! = 1*2*3*4*5 = 120n$

Per convenzione $0! = 1$

Vale la seguente formula ricorrente: $\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n \end{cases}$

I coefficienti binomiali risolvono il seguente problema:

Quanti raggruppamenti o combinazioni si possono fare con n oggetti prendendone k per volta?

Per questo i coefficienti binomiali sono indicati anche con il simbolo $C_{n,k}$.

Esempio: con 5 oggetti A, B, C, D, E prendendone 3 per volta si possono avere 10 combinazioni (o raggruppamenti):

ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE,

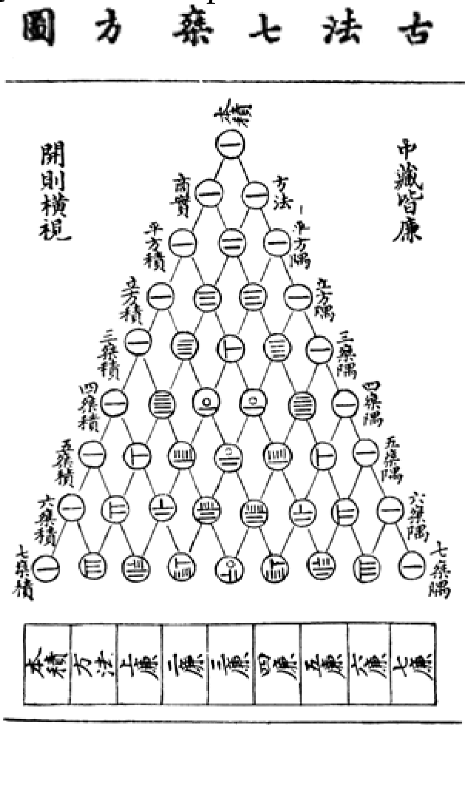
infatti:

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{120}{12} = 10$$

Problemi di questo tipo si incontrano in una parte della matematica denominata calcolo combinatorio a sua volta importante nell'ambito del calcolo delle probabilità che si è sviluppato soprattutto a partire dalla metà del XVII secolo grazie all'opera di BLAISE PASCAL (1623-1662).

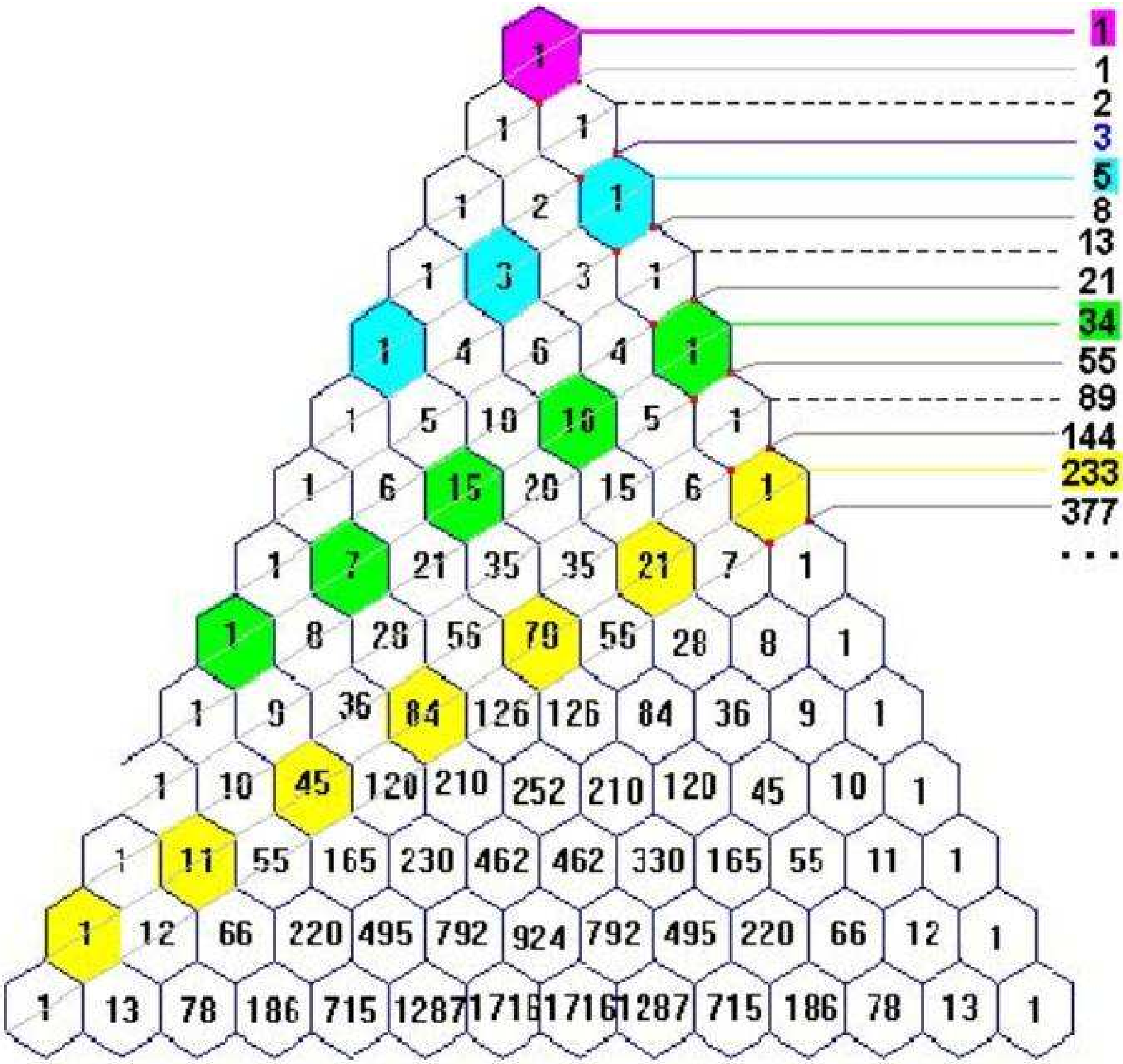
Blaise Pascal, nel 1654, scrisse un intero libro, *"Le Triangle Aritmétique"*, dedicato al triangolo di Tartaglia e alle sue proprietà, in particolare nel campo del calcolo combinatorio. Questo studio fu tanto importante che portò, in seguito, a ribattezzare il triangolo di Tartaglia con il nome di *"TRIANGOLO di PASCAL"* e come tale è ormai noto in tutto il mondo.

Più giustamente, però, si dovrebbe parlare di *"TRIANGOLO CINESE"*; in un libro cinese del 1303 intitolato "*Prezioso Specchio dei Quattro Elementi*", scritto dal matematico cinese Zhu Shijie, tale triangolo appare con il nome di *"Tavola del Vecchio Metodo dei Sette Quadrati Moltiplicatori "*.



NUMERI DI FIBONACCI

Dal triangolo di tartaglia si possono ricavar i numeri di Fibonacci, basta sommare i numeri delle diagonali come evidenziate nella figura: così dalla prima riga otteniamo 1, dalla seconda ancora 1, poi 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...,



I numeri

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

sono detti di Fibonacci, perché originati da un problema proposto a Leonardo Pisano detto Fibonacci, figlio di Guglielmo Bonacci (Fibonacci sta per *Filius Bonaccii* , il figlio di Bonaccio) e vissuto a Pisa tra il 1170 e il 1240.

Grazie all'attività del padre segretario della Repubblica di Pisa e responsabile del commercio pisano presso la colonia di Bugia, in Algeria, Fibonacci fece molti viaggi in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza. Leonardo colse l'opportunità offertagli dai suoi viaggi all’estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove per i seguenti 25 anni lavorò alle sue personali composizioni matematiche.


IL

LIBER ABBACI

DI

LEONARDO PISANO

PUBBLICATO

SECONDO LA LEZIONE DEL CODICE MAGLIABECHIANO

C. I, 2616, Badia Fiorentina, n.° 73

DA

BALDASSARRE BONCOMPAGNI

[illegible]

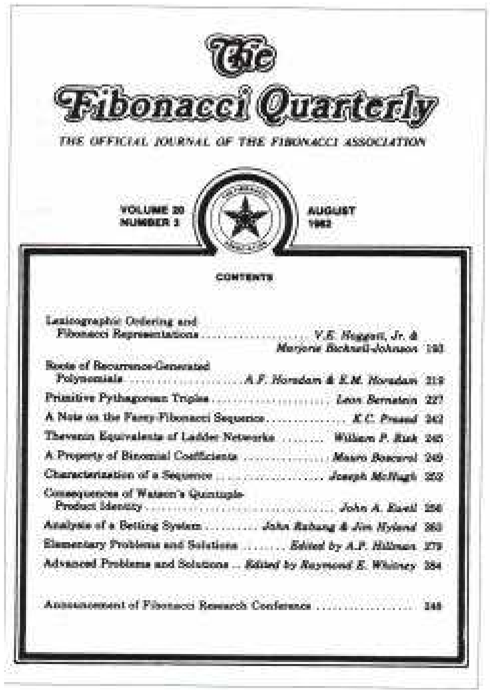
ROMA

[illegible]

MDCCCLVII

In tutta la sua produzione l’opera più importante è il *"Liber abbaci"*, comparso attorno al 1228: è un lavoro contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ha avuto una funzione fondamentale nello sviluppo della matematica dell’Europa occidentale. In particolare la numerazione indo-arabica, che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano: pertanto egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, corrispondente allo zero "0", per indicare le posizioni vacanti.

Anche al giorno d’oggi la fama di Leonardo è tale che esiste un’intera pubblicazione dedicata a questi argomenti: il *"Fibonacci Quarterly"*, periodico matematico, edito dal 1963, dedicato interamente all’aritmetica connessa alla sequenza di Fibonacci.


The Fibonacci Quarterly

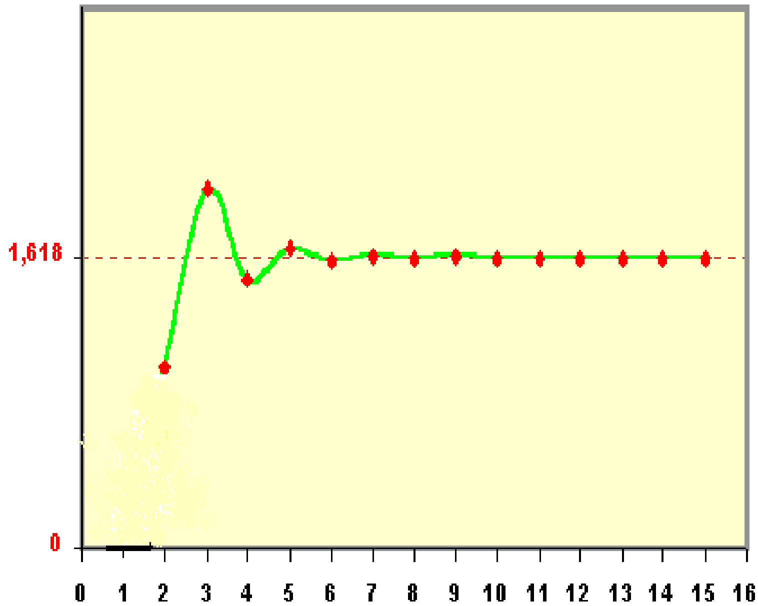
THE OFFICIAL JOURNAL OF THE FIBONACCI ASSOCIATION

VOLUME 20 NUMBER 3 — AUGUST 1982

CONTENTS

Il rapporto R_n tra un numero di Fibonacci e il suo precedente, dà un risultato che si avvicina sempre più al numero 1,618… man mano che si considerano numeri sempre più grandi.

n	F(n)	R_n
1	1	
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615384615
9	34	1,619047619
10	55	1,617647059
11	89	1,618181818
12	144	1,617977528
13	233	1,618055556
14	377	1,618025751
15	610	1,618037135
16	987	1,618032787
17	1597	1,618034448
18	2584	1,618033813
19	4181	1,618034056
20	6765	1,618033963
21	10946	1,618033999
22	17711	1,618033985
23	28657	1,61803399
24	46368	1,618033988
25	75025	1,618033989
26	121393	1,618033989



Questo numero indicato con Φ oppure con PHI (“fi” grande o maiuscolo), lo si incontra nella costruzione della sezione aurea di un segmento, per questo è anche denominato numero aureo. Grazie a questa caratteristica dei numeri di Fibonacci si può spaziare dall’Algebra alla Geometria.

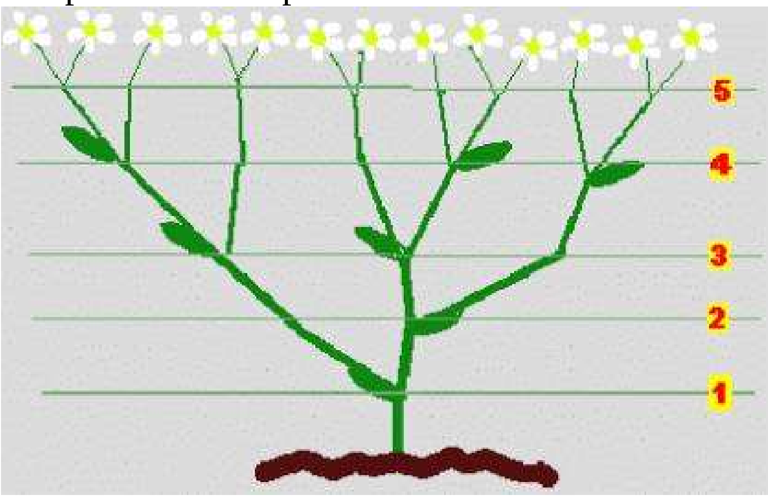
La successione di Fibonacci si può definire in modo ricorsivo così:
Ogni numero di Fibonacci si può ottenere dalla somma dei due precedenti.

In formule, indicati con F(1) ed F(2) i primi due numeri di Fibonacci, si ha

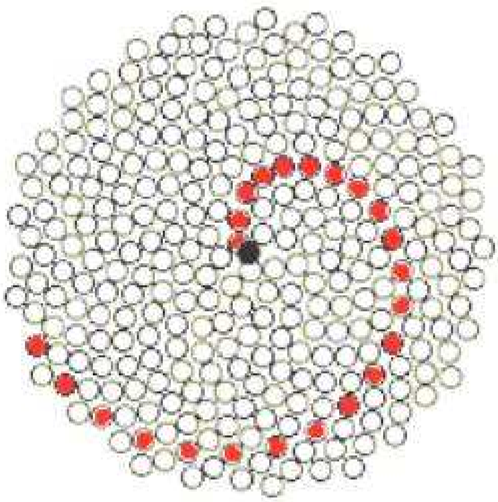
$$\begin{cases} F(1)=1 \\ F(2)=1 \\ F(n)=F(n-2)+F(n-1) \end{cases}$$

La successione di Fibonacci

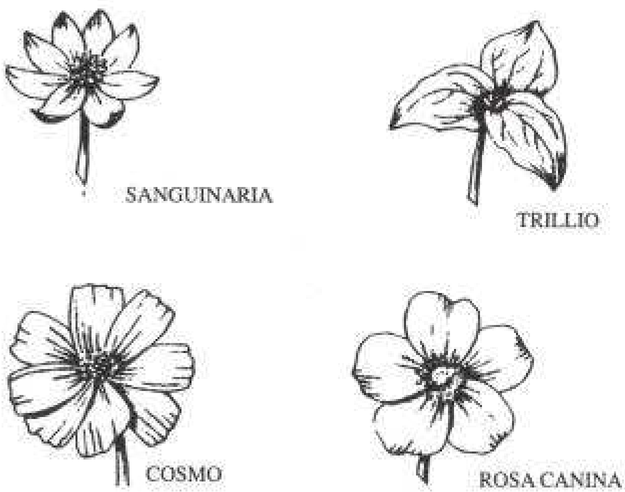
1. In BOTANICA
   La sequenza di Fibonacci sitrova in molte piante e fiori.
   Esempio: l'Achilleaptarmica.



(Ogni ramo impiega un mese prima di potersi biforcare, similmente al problema dei conigli)



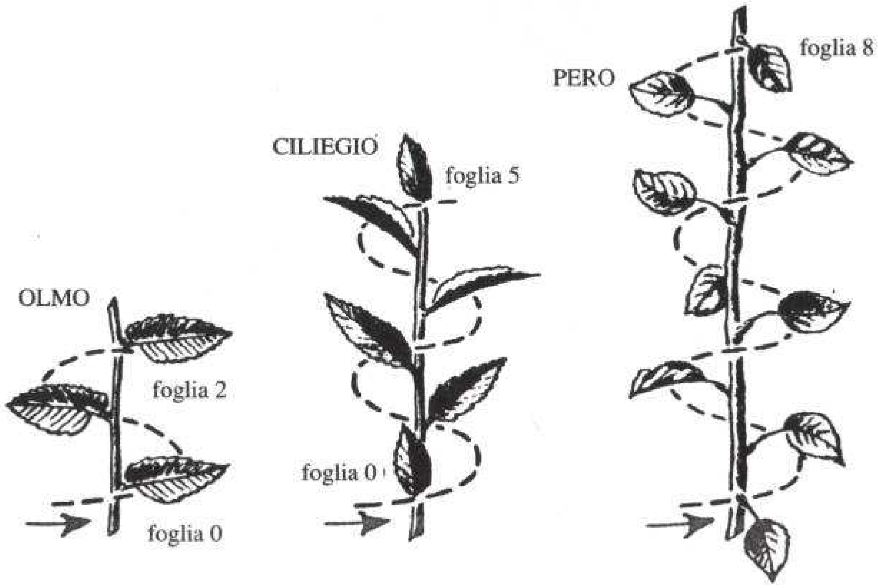
I pistilli sulle corolle dei fiori spesso sono messi secondo uno schema preciso formato da spirali il cui numero corrisponde ad uno della serie di Fibonacci.



Molti fiori presentano un numero di petali che è un numero di Fibonacci.

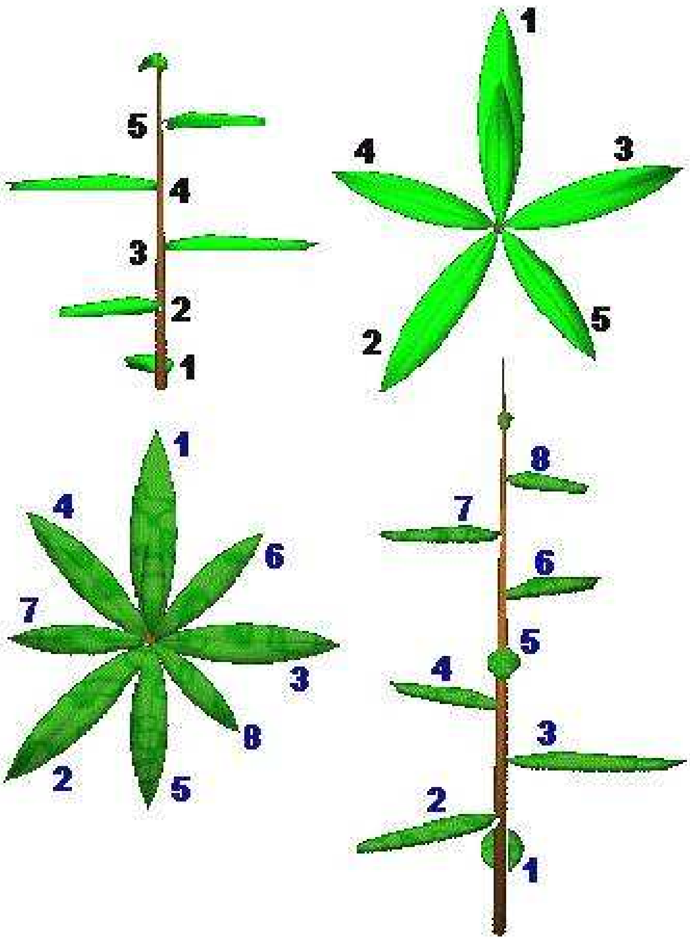
(Esistono margherite con 34 e 55 parti petaliformi)

Infine le foglie sui rami di numerose piante sono disposte in modo da presentare alcuni numeri della sequenza di Fibonacci.

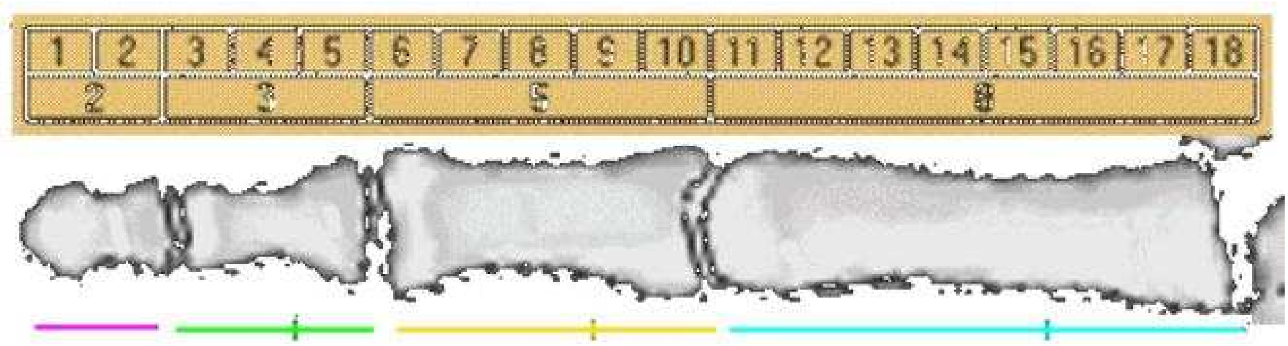


Le foglie sono disposte sui rami in modo tale da non coprirsi l'una con l'altra per permettere a ciascuna di esse di ricevere la luce del sole.

Se prendiamo come punto di partenza la prima foglia di un ramo e si contano quante foglie ci sono fino a quella perfettamente allineata spesso viene un numero di Fibonacci e anche il numero di giri in senso orario o antiorario che si compiono per raggiungere tale foglia allineata dovrebbe essere un numero di Fibonacci.
Il rapporto tra il numero di foglie e il numero di giri si chiama"*rapporto fillotattico*".



2. Nel CORPO UMANO



Il rapporto fra le falangi di un dito di un uomo adulto formano una piccola serie di Fibonacci.

3. In ECONOMIA
Un'applicazione moderna dei numeri di Fibonacci si può riscontrare in una teoria di previsione dei mercati finanziari, elaborata da Ralph Elson Elliot, con la quale in tempi recenti sono stati anticipati i più grandi rialzi e i più grandi crolli di borsa (ad es. con incredibile precisione è stato previsto il punto minimo di ribasso nell'estate'98 alla borsa di Milano).

4. In INFORMATICA
I numeri di Fibonacci sono utilizzati anche nel sistema informatico di molti computer. In particolare vi è un complesso meccanismo basato su tali numeri, detto "Fibonacci heap" che viene utilizzato nel processore Pentium della Intel per la risoluzione di particolari algoritmi.

NUMERI TRIANGOLARI

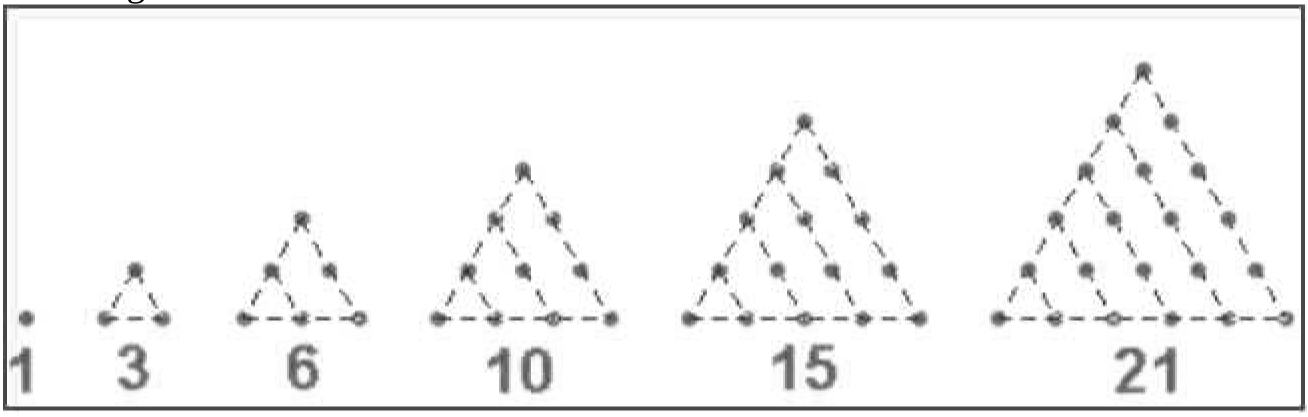
Dal triangolo di Tartaglia si possono evidenziare due diagonali composte da numeri detti Triangolari:

												1												
											1		1											
										1		2		1										
									1		3		3		1									
								1		4		6		4		1								
							1		5		10		10		5		1							
						1		6		15		20		15		6		1						
					1		7		21		35		35		21		7		1					
				1		8		28		56		70		56		28		8		1				
			1		9		36		84		126		126		84		36		9		1			
		1		10		45		156		210		252		210		156		45		10		1		
	1		11		55		201		366		462		462		366		201		55		11		1	
...		...		...		...		...		...		...		...		...		...		...		...		...

Questi numeri:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, . . .

sono detti triangolari per il fatto che si possono rappresentare geometricamente con dei triangoli :



Un *numero triangolare* è dato dalla somma di un numero naturale n e di tutti i suoi precedenti.

Indicato con t_n l'ennesimo numero triangolare si ha:

$$t_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$$

Esempio: il sesto numero triangolare è $t_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Inoltre, essendo la successione dei numeri naturali una particolare *progressione aritmetica*

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

si ha

$$t_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + n}{2} \cdot n$$

cioè:

$$t_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Esempio: $t_6 = \frac{6^2 + 6}{2} = \frac{36 + 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$

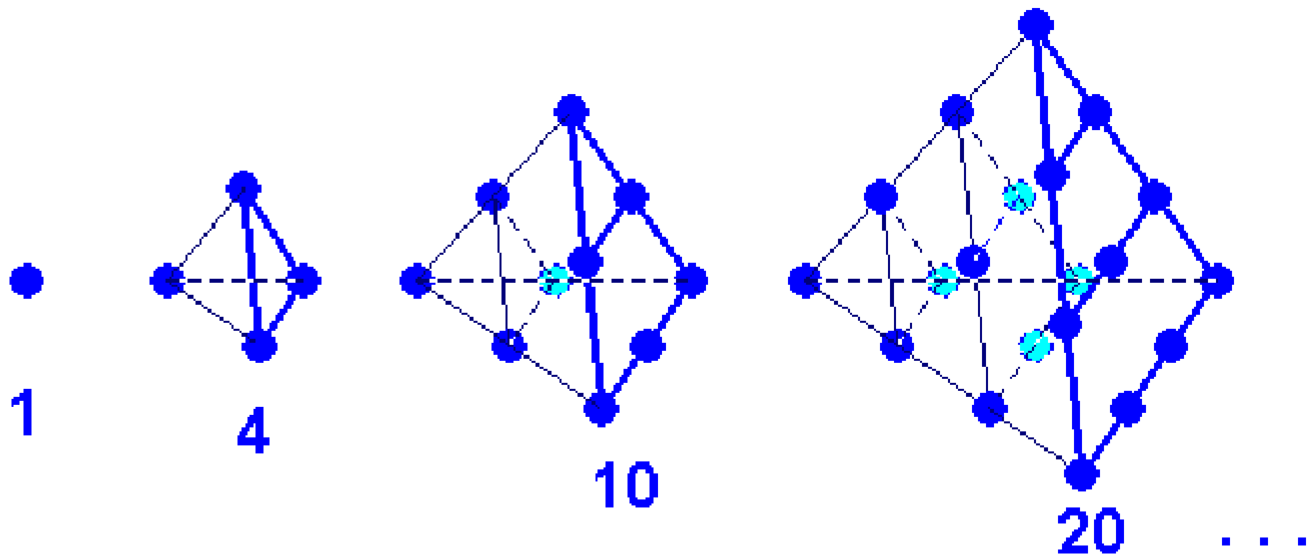
I numeri triangolari appartengono ad una categoria di numeri detti poligonali o triangolari.

NUMERI POLIGINALI (o FIGURATI)

In generale, per l'ennesimo numero x-agonale vale la formula:

$$x_n = \left(\frac{n^2 - n}{2} \right) \cdot (x-2) + n$$

Un caso particolare di numeri poligonali sono i numeri *tetraedrici*.



L'ennesimo numero tetraedrico è dato dalla somma dei primi n numeri triangolari

$$T_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$$

Esempio: T_3 = 1+3+6 = 10

Anche i numeri tetraedrici si possono leggere nel triangolo di Tartaglia.

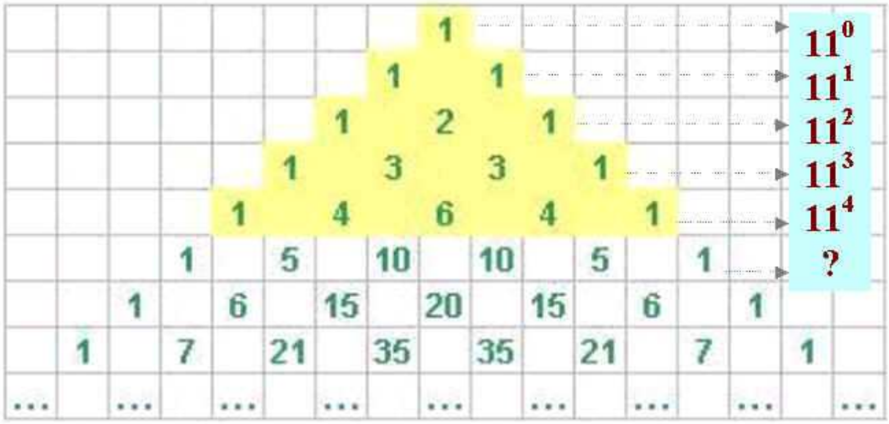
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .

LE POTENZE DI 11

I numeri delle prime 5 righe del triangolo di Tartaglia visti come cifre danno i numeri

1, 11, 121, 1331, 14641;

cioè le prime 5 potenze di 11 : 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4.



A prima vista, sembra che le righe successive non siano più collegabili in qualche modo con le potenze successive di 11, ma un'analisi più attenta, ci ha fatto "scoprire" che è dovuto alla presenza di numeri con più cifre.

Esempio: nella 6ª riga c'è già la presenza del numero 10 due volte, nella 7ª i numeri 15 e 20, etc.

Infatti con un gioco di somme e di riporti, partendo da una qualsiasi riga e dopo aver considerato ogni numero come composto solo da unità e decine, si riesce ad ottenere la potenza di 11 relativa a quella riga.

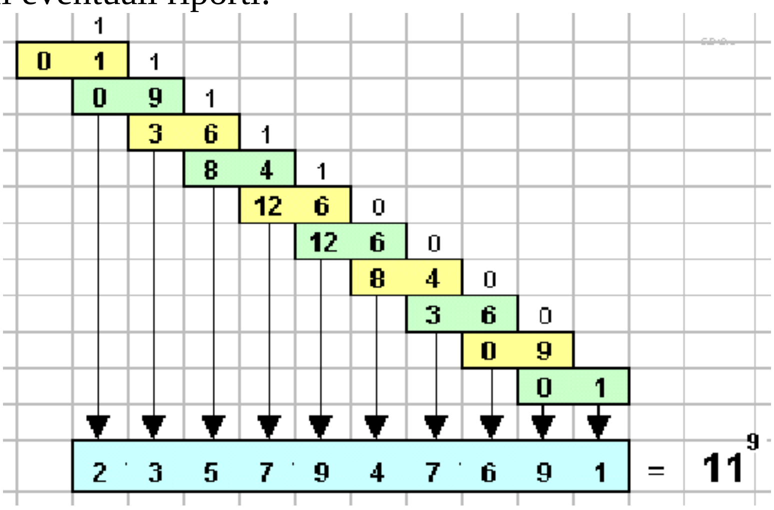
Per illustrare il procedimento, consideriamo ad es. la 10ª riga--->11^9,

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

in ogni numero si evidenziano solo le decine e le unità

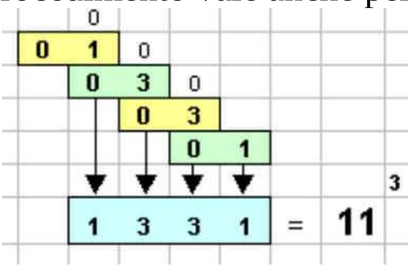
01 09 36 84 126 126 84 36 09 01

iniziando da destra, si addizionano le decine di ogni numero con le unità del numero precedente più gli eventuali riporti:



Le unità di ogni somma vanno a costituire le cifre della 9ª potenza di 11, mentre le decine sono i riporti da considerare nella somma successiva.

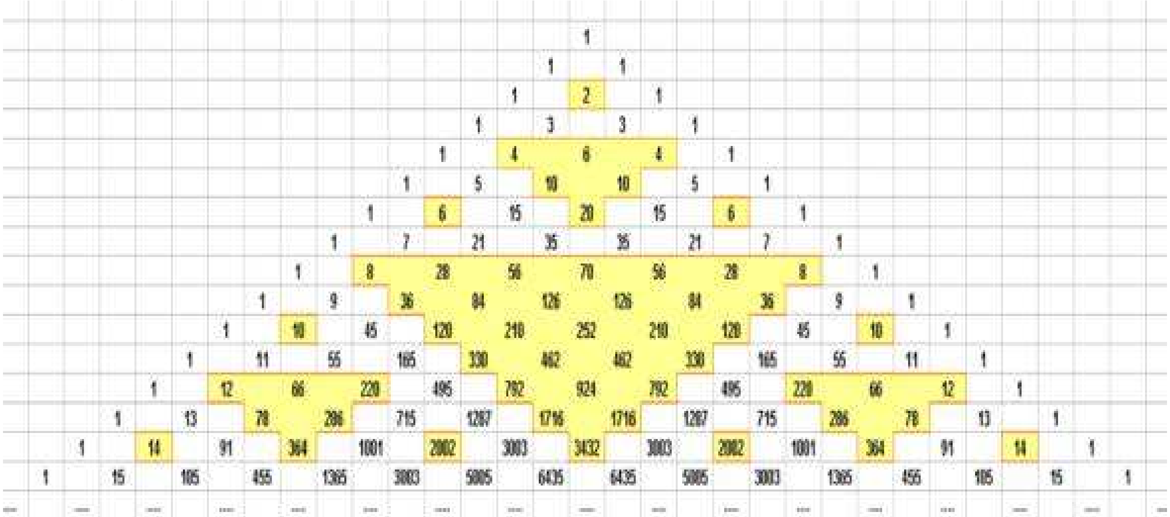
Si può vedere che tale procedimento vale anche per le prime righe,

Esempio: per la 4ª riga: 

.

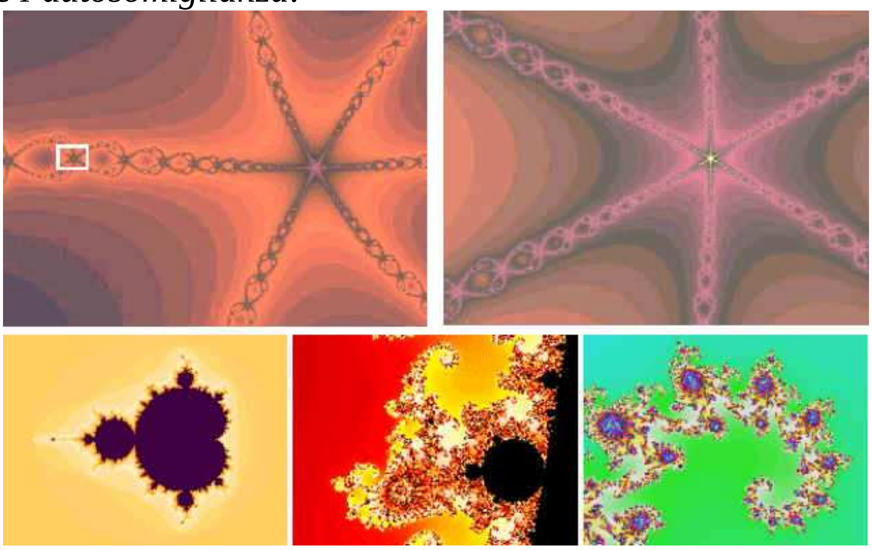
I FRATTALI

Se nel triangolo di Tartaglia si colorano le celle dei numeri pari si ha:

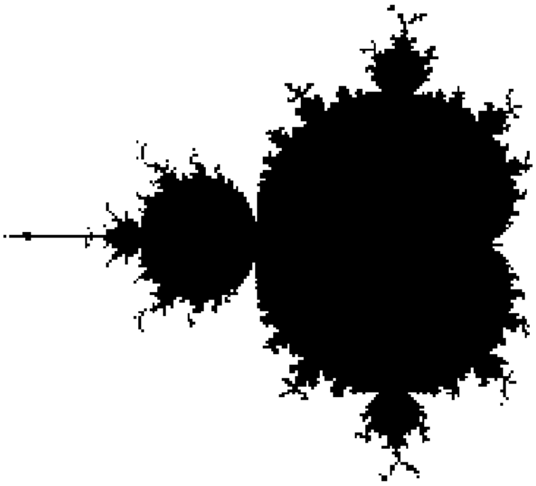


cioè si forma una figura simile ad una figura geometrica nota come triangolo di Sierpinskj. Il triangolo di Sierpinski è un esempio di figura frattale.

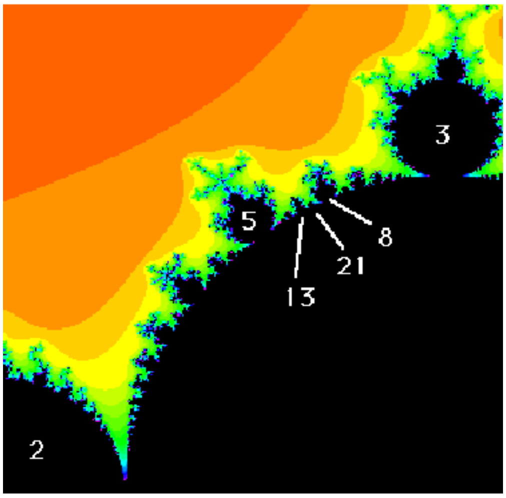
I frattali sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi sino all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. Questa è la “definizione” più intuitiva che si possa dare di figure che in natura si presentano con una frequenza impressionante, ma che non hanno ancora una definizione matematica precisa: la proprietà principale di un frattale è l'*autosomiglianza*.



Il frattale più famoso è l'INSIEME di MANDELBROT



In esso si ritrovano i Numeri di FIBONACCI



PROPROETÀ & CURIOSITÀ

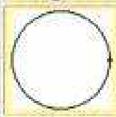
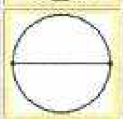
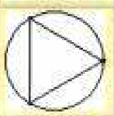
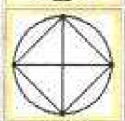
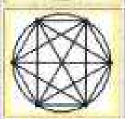
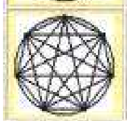
1. <u>Potenze del 2</u>
   Le somme dei numeri di ogni riga danno le potenze di 2

n		2^n
0	1	2^0
1	1 + 1	2^1
2	1 + 2 + 1	2^2
3	1 + 3 + 3 + 1	2^3
4	1 + 4 + 6 + 4 + 1	2^4
5	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	2^5
6	1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	2^6
7	1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1	2^7
.	. . . .	

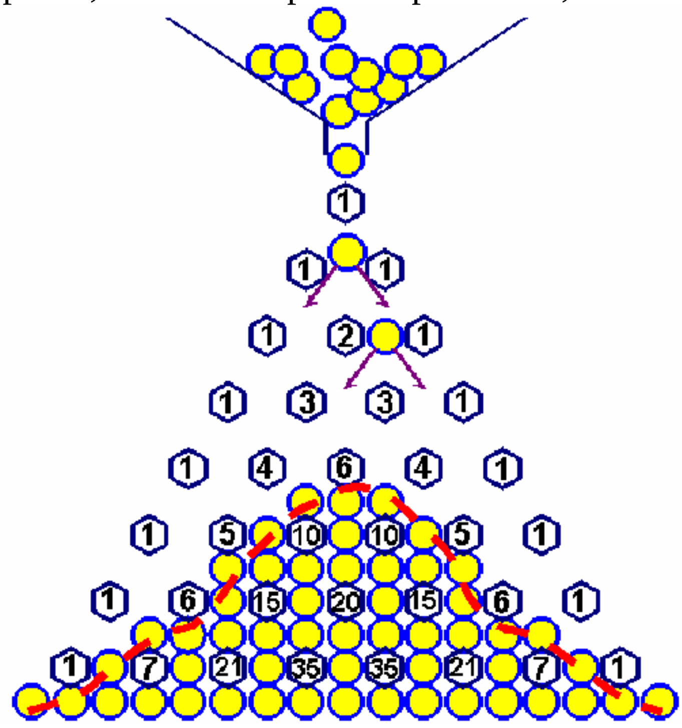
2. <u>La mazza da hockey</u>
   Nel triangolo di Tartaglia si può notare un'altra proprietà detta della "mazza da hockey": se si iniziano a sommare i numeri di una diagonale, partendo dall'uno che si trova al bordo del triangolo, in qualsiasi posizione ci si ferma il numero che si trova nella riga sottostante sarà il risultato.

										1										
									1		1									
								1		2		1								
							1		3		3		1							
						1		4		6		4		1						
					1		5		10		10		5		1					
				1		6		15		20		15		6		1				
			1		7		21		35		35		21		7		1			
		1		8		28		56		70		56		28		8		1		
	1		9		36		84		126		126		84		36		9		1	
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1
...	...	...		...		...		...		...		...		...		...		...		...

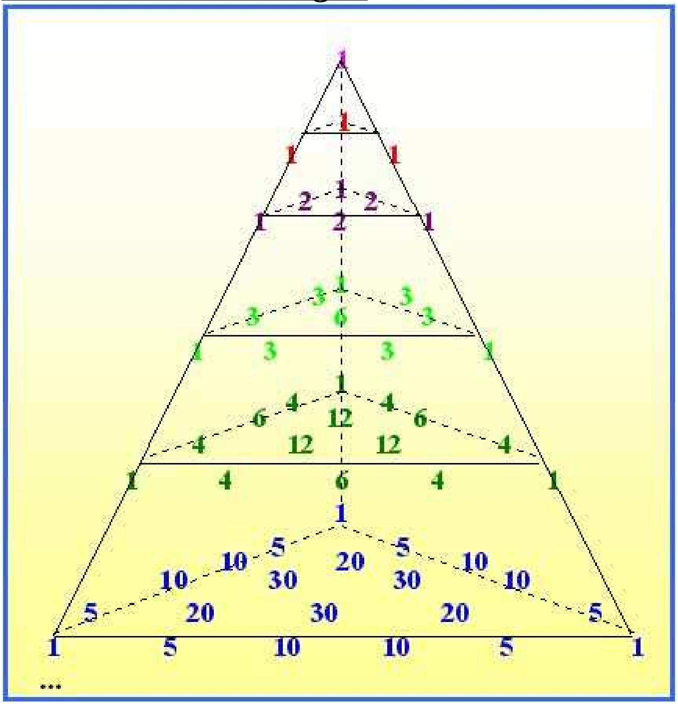
3. <u>Punti su una circonferenza e triangolo di Tartaglia</u>
   A seconda del numero di punti su una circonferenza si possono costruire segmenti (corde), triangoli, quadrilateri, pentagoni, etc. . . .con vertici i punti dati; ad esempio con 4 punti si hanno: 6 segmenti, 4 triangoli e 1 quadrilatero.
   Così, partendo dalla situazione iniziale di 1 punto, si può generare parzialmente il triangolo di Tartaglia:

Figura	Punti	Segmenti	Triangoli	Quadrilateri	Pentagoni	Esagoni	Ettagoni
	1						
	2	1					
	3	3	1				
	4	6	4	1			
	5	10	10	5	1		
	6	15	20	15	6	1	
	7	21	35	35	21	7	1

4. <u>Un modo singolare per generare il triangolo di Tartaglia</u>
Dato un triangolo formato da blocchi esagonali e delle biglie che, provenienti da un serbatoio posto al di sopra del vertice alto, scendono passando fra gli ostacoli esagonali. A ciascuno esagono, ciascuna pallina ha pari probabilità di rotolare a destra o a sinistra, le biglie si distribuiscono secondo i numeri del triangolo di Tartaglia. Se le biglie vengono raccolte su un fondo esse si accumulano producendo una figura a forma di campana detta curva di distribuzione normale o di Gauss. Questa curva è usata dalle compagnie di assicurazioni per stabilire i premi, in statistica per fare previsioni, dalle aziende per il controllo qualità, etc.



5. <u>La Piramide di Tartaglia</u>



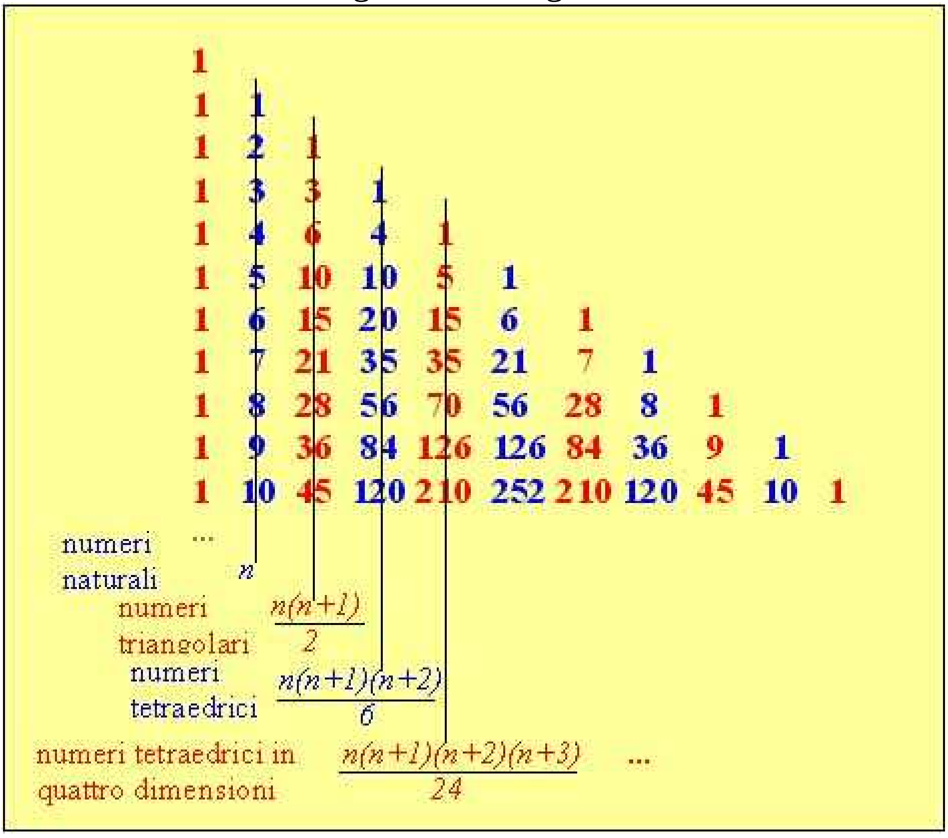
La Piramide di Tartaglia, è un tetraedro che ha come numero generatore, al

vertice, 1. Ogni altro numero è la somma dei tre numeri che si trovano al livello immediatamente superiore, anche in questo caso tenendo conto degli eventuali zeri. Il numero di punti, al livello n, è la somma dei quadrati da 1 a n^2:
$1 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
Dalla piramide è possibile ricavare i coefficienti delle potenze di un trinomio. Ad esempio, al quarto livello ritroviamo i coefficienti della quarta potenza del trinomio:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4 + 4ac^3 + 6a^2c^2 + 4a^3c + \\ +12a^2bc + 12ab^2c + 12abc^2$$

Si può intuire che sviluppando l'idea del triangolo oltre la terza dimensione, in generale a uno spazio a n dimensioni, si potranno ricavare i coefficienti delle potenze di un qualsiasi polinomio di n termini.

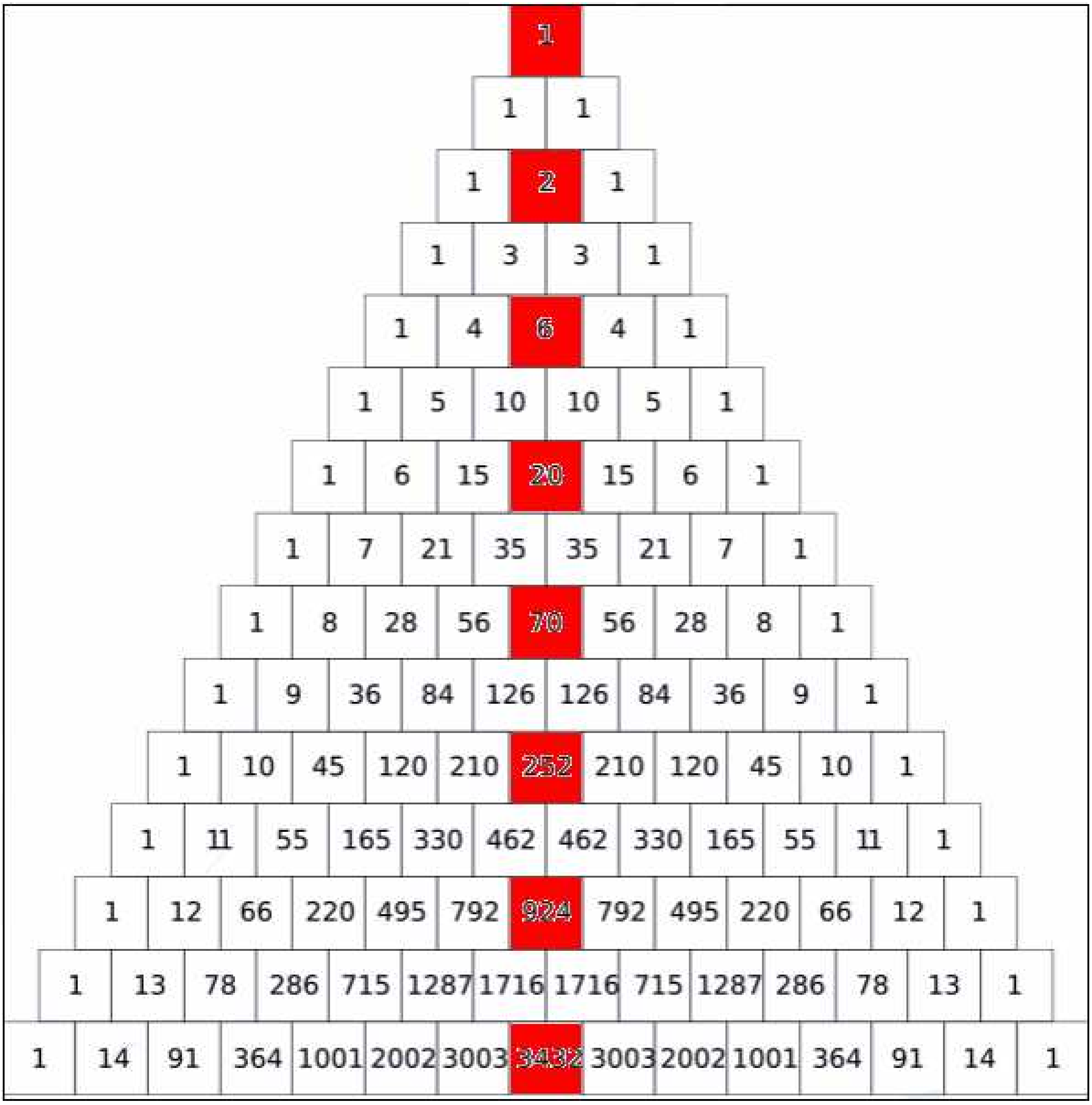
6. Le successioni nel triangolo di Tartaglia



La prima colonna del Triangolo di Tartaglia è composta dalla successione dei numeri naturali n, la seconda dai numeri triangolari n(n+1)/2, la terza dai numeri tetraedrici n(n+1)(n+2)/2*3, la quarta i numeri ipertetraedrici n(n+1)(n+2)(n+3)/2*3*4, cioè del tetraedro in quattro dimensioni, la quinta del tetraedro in cinque dimensioni n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)/2*3*4*5 e così via.

7. La successione di Catalan

Anche i numeri di Catalan, che si prova essere legati ai coefficienti binomiali dalla relazione: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, sono collegati al triangolo di Tartaglia.



I numeri al centro nel triangolo di Tartaglia sono 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620… e possono essere divisi per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10… ottenendo così questa nuova successione di numeri: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862 … che rappresentano appunto i numeri di Catalan.

BIBLIOGRAIA

[1] J.H.Conway-R.K.Guy , The book of numbers , Copernicus - Springer - Verlag 1955
[2] Graham-Knuth-Patashnik , Matematica discreta , Hoepli 1992

SITOGRAFIA

[1] **http://it.wikipedia.org/wiki/Triangolo_di_Tartaglia**
[2] **http://www.iisolivetti.cjb.net/DORO1/T_Tart_W/Pag1.htm**
[3] **http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Nov_07/TriangoloTartaglia.htm**