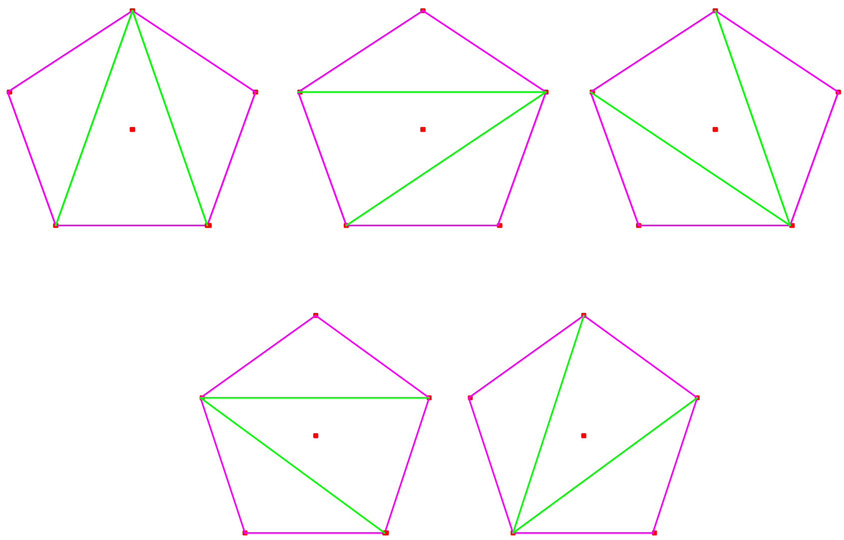
I numeri di Catalan.

I numeri di Catalan , la cui successione è 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, …, sono importanti numeri ricorsivi, che prendono il nome dal matematico belga Eugene Charles Catalan vissuto nell’Ottocento, il quale fu, oltre che matematico, attivista politico (partecipò alle rivoluzioni del 1848 e si rifiutò di prestare giuramento all’impero).
Vengono definiti in modo ricorsivo, ossia la successione di termini viene individuata mediante una relazione, detta ricorsiva, che lega l’ultimo termine a quelli precedenti con l’aggiunta di una o più condizioni iniziali. Quando è possibile calcolare l’n-esimo termine usando soltanto il precedente la relazione è detta del primo ordine, se occorre invece conoscerli tutti si dice che la relazione non ha ordine finito.
I numeri di Catalan sono definiti tramite una relazione ricorsiva non lineare di ordine 2.
Questi numeri vengono denotati con C(i) oppure C_i e vennero introdotti proprio da Catalan nel 1838 come soluzione del seguente problema (già affrontato da Eulero): in quanti modi diversi si può suddividere un poligono convesso con n+2 lati in n triangoli, tracciandone le diagonali in modo che non si intersechino?
Riportiamo come esempio la suddivisione del pentagono:



Tale problema ha varie formulazioni del tutto equivalenti.

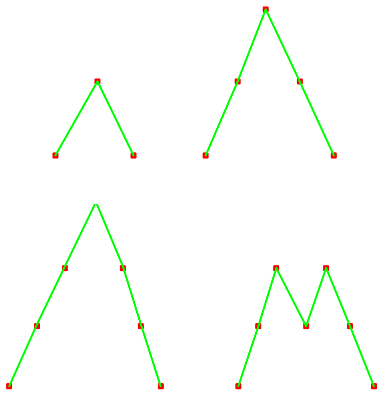
1) Quanti valori ci si può aspettare da una torre di potenze n-upla?

$$3^2 = 9$$

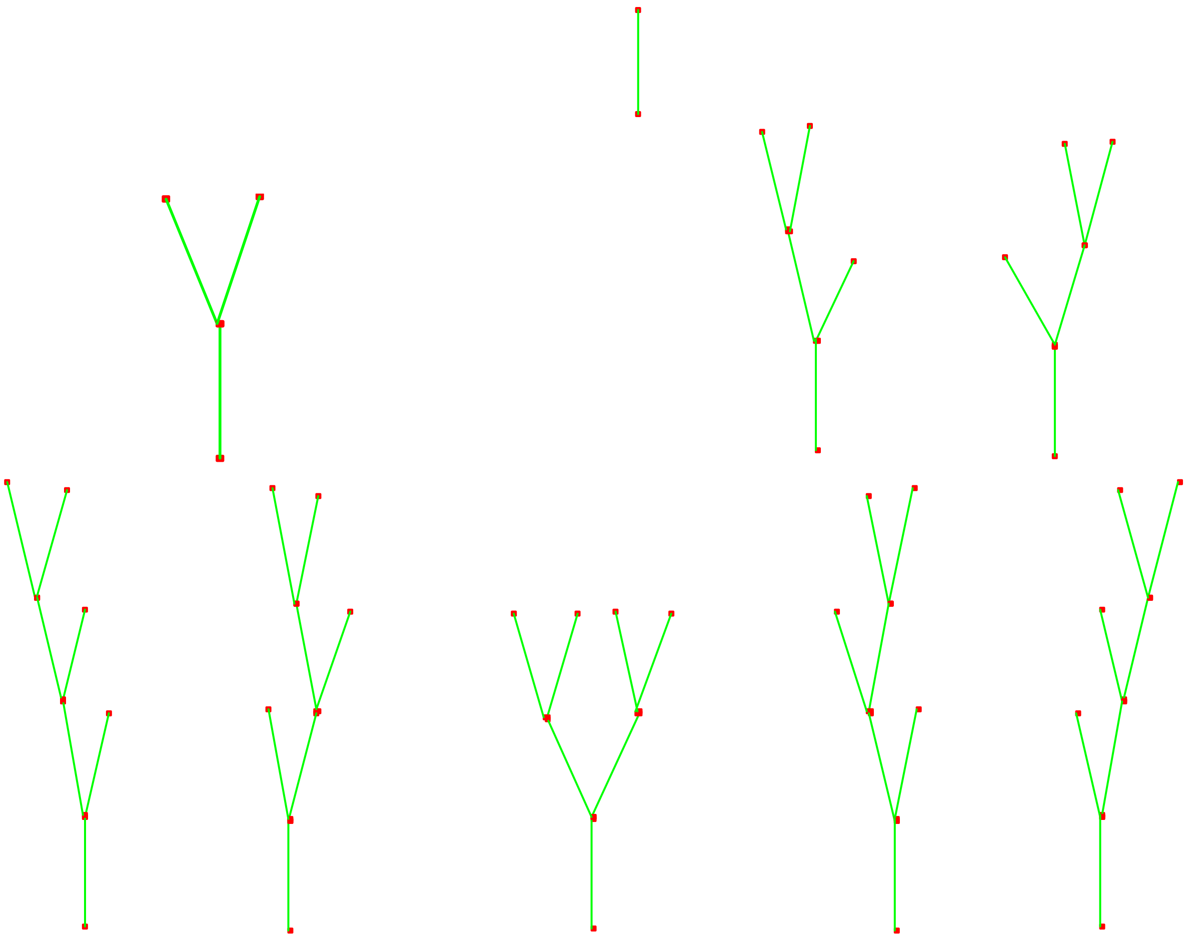
$$(4^3)^2 = 4^6 \qquad 4^{(3)^2} = 4^9$$

$$((5^4)^3)^2 = 5^{24} \quad 5^{\left(4^{(3^2)}\right)} = 5^{262144} \quad (5^{(4^3)})^2 = 5^{128} \quad (5^4)^{(3^2)} = 5^{36} \quad 5^{((4^3)^2)} = 5^{4096}$$

2) Quante montagne si possono disegnare con n tratti verso l'alto ed n verso il basso?



3)Quanti alberi binari piantati ci sono con n nodi interni?



4) In quanti modi è possibile eseguire un'operazione non associativa su n fattori a_i di un insieme A? Questa formulazione viene anche chiamata "il problema delle parentesi".
Se abbiamo a che fare con un'operazione non associativa il prodotto non può essere scritto privo di parentesi: in quanti modi dunque possiamo inserire queste parentesi? Se ad esempio dividiamo tre elementi abbiamo 2 possibilità: (a:b):c ,oppure a:(b:c), se ne dividiamo quattro i possibili risultati sono cinque (a:b)(:c:d) , (a:(b:c):d) , ((a:b):c):d , a:((b:c):d) , a:(b:(c:d)).
Pertanto possimo osservare che C_3=2 e C_4=5 , avendo C_1=1, C_2=1.
Per calcolare l'n-esimo numero di Catalan, ossia il numero di modi in cui è possibile moltiplicare n elementi, osserviamo innanzi tutto che esso si scrive in modo unico come pq, dove p è uno dei possibili prodotti dei primi i termini e q è uno dei posibili prodotti di n-(i+i) termini. Per ogni i esistono Ci diversi p e C_{n-i} diversi q , quindi C_iC_{n-i} diversi prodotti pq.
Si ottiene così la relazione non lineare ricorsiva che segue:

$$C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i C_{n-i} \qquad n \geq 2$$

Questa formula è dovuta al matematico Segner.

I numeri di Catalan sono soluzione di molti problemi in matematica discreta , come quello dovuto al matematico Erdos. Supponiamo di avere lo stesso numero di "+1"e"-1" e di disporli in modo consecutivo in un ordine qualsiasi. Prendendo ad esempio due "+1"e due "-1" otteniamo sei righe diverse:

+1+1-1-1
+1-1+1-1
-1+1-1+1
-1+1+1-1
-1-1+1+1
+1-1-1+1

Il problema di Erdos consiste nel determinare il numero di righe che non hanno mai somme parziali negative, ovviamente ogni riga ha come somma totale zero.
Nella prima riga , ad esempio, la somma dopo il primo termine è 1, dopo il secondo 2, dopo il terzo 1, infine, dopo il quarto 0; pertanto non ci sono mai somme parziali negative. La stessa cosa vale per la seconda riga; sono le uniche per cui valga questa "proprietà".
Con n =3 si ottengono 20 righe delle quali solo 5 hanno somme parziali non negative. Procedendo in questo modo, calcolando ogni volta il numero di righe che godono della "proprietà" citata, si ottiene la seguente successione di numeri :

2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,…   Sono proprio i numeri di Catalan!

Si può notare che se abbiamo n "+1"e quindi n "-1" ogni numero della successione si può ricavare moltiplicando il numero totali delle righe per $1/_{n+1}$. Con n=3 si hanno 20 righe di cui 5 senza somme parziali negative , infatti, applicando quanto appena detto, 20(1/4)=5; n=4 si hanno 70 righe quindi 70(1/5)=14 e così via.

Questa non deve essere vista come una mera speculazione intellettuale, ma può avere diverse applicazioni di carattere pratico. Pensiamo, ad esempio, alla coda che si può formare al botteghino di un teatro; supponiamo che il biglietto costi 10euro e che alla cassa si presenti un gruppo di persone metà delle quali ha la cifra esatta e l'altra metà necessiti di resto, avendo 20 euro.
Ci si chiede in quanti modi diversi si possano mettere in fila in modo che la cassa, iniziando senza soldi, abbia sempre il resto necessario. Questo equivale al problema di Erdos!

Si prova che i numeri di Catalan sono legati ai coefficienti binomiali dalla relazione:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Possono infatti essere ricollegati anche al triangolo di Pascal in questo modo, vediamo innanzitutto il triangolo:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

I numeri al centro nel triangolo di Pascal : 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620… possono essere divisi per: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10… ottenendo così questa nuova successione di numeri:
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862 …che rappresentano appunto i numeri di Catalan.

Bibliografia:

1) Cerasoli - Eugeni - Protasi "Elementi di matematica discreta" , Zanichelli, Bologna,1988.
2) Conti "Calcolo: teoria e applicazioni", McGraw- Hill, Milano, 1993.
3) Conway – Guy "The book of numbers", Copernicus- Springer- Verlag, 1955.
4) Romagnoli "Elementi di matematica discreta" Quaderno didattico 23 del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 2004.