Università degli Studi di Torino
Corso di Laurea in Matematica

Laboratorio di Combinatorica

Successioni ricorsive:

I numeri di Catalan

Chiara Ghigo

matricola 327924

Premessa.

In questa tesina esamino particolari successioni di interi, dette ricorsive, e in particolare i NUMERI DI CATALAN: numeri dalle proprietà interessanti e dalle molteplici interpretazioni.

LE SUCCESSIONI

Come è noto si chiama ***successione*** di elementi, di un dato insieme *A,* un'applicazione dall'insieme **N** dei numeri naturali in *A*:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A$$

Se A è finito la successione si dice ***finita***, altrimenti si dice ***infinita*** . Di norma, se non ci sono ulteriori precisazioni, per successione si intende una successione infinita con l'insieme A coincidente con tutto *N*, eventualmente privato solo di qualcuno dei suoi primi elementi. I valori a_n si chiamano anche *termini* della successione ed a_k stesso è detto *termine k-esimo*. Spesso per indicare una successione si elencano, in ordine, gli elementi del codominio, ossia

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,a_n,\ \dots.$$

ma in molti casi si usa anche la notazione $\{a_n\}$.

A seconda di come sia definito il codominio A, le successioni possono essere costituite da semplici numeri reali o complessi, le ***successioni numeriche,*** che possono esser ***aritmetiche*** o ***geometriche***. Le prime vengono utilizzate specialmente in problemi di tipo economico, le altre, invece, sono importanti nei processi di tipo biologico. Ma esistono anche successioni con termini delle funzioni e, in questo caso, si parla di ***successione di funzioni***, oppure ancora da altri oggetti matematici, come matrici, ecc..

Le successioni, oltreché in maniera "***esplicita***", si possono anche definire per ***ricorsione***, sulla base del principio di induzione. Un oggetto è detto ricorsivo se è definito, almeno parzialmente, in termini di se stesso.

Definizione. Una successione si dice ***ricorsiva***, o ***definita in modo ricorsivo***, quando il suo n-esimo termine è calcolato come funzione di alcuni dei precedenti, avendo posto delle condizioni iniziali per i primi termini:

$$a_n = f(a_{n-1} \dots . a_0)$$

dove non tutti i termini precedenti all'n-esimo sono necessariamente argomento della funzione.

Tra le successioni ricorsive più famose ci sono quella di ***Fibonacci***, quella di ***Lucas***, i numeri di ***Bell*** e quelli di ***Catalan***.

I NUMERI DI CATALAN

I numeri di Catalan sono una successione C_n di ***interi positivi*** i cui primi valori sono:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, …

Il nome di questi numeri è stato scelto in onore del matematico belga ***Eugène Charles Catalan*** (1814-1884) che li aveva studiati intorno al 1838.
La successione di questi numeri però già nel XVIII secolo era stata individuata dal matematico tedesco-ungherese ***Jan Andrej Segner*** (1704-1777) ed era stata studiata ancora prima da **Eulero**. Inoltre, contemporaneamente a Catalan, era stata studiata dal matematico francese Jacques **Binet** (1786-1857).

Essi si possono ottenere tramite una ***formula esplicita*** per la successione C_n, di tipo combinatorio

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Dalla precedente relazione si può notare che i numeri di Catalan sono legati ai coefficienti binomiali; infatti analizzando con attenzione il triangolo di Tartaglia scoviamo questa successione nella verticale centrale dividendo i valori per la successione 1, 2, 3, 4, 5…

1
1 **2** 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 **70** 56 28 8 1
….

I numeri di Catalan si possono ottenere anche a partire da $C_0 := 1$, mediante la seguente relazione di ricorrenza di Segner (1758)

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} \quad \text{per } n \geq 1 .$$

Questa uguaglianza garantisce che tutti i numeri della forma usata nella prima definizione sono numeri interi.

La successione individuata da Segner è **ricorsiva**, **non lineare** (perché i termini non sono tutti di 1° grado) e del **secondo ordine** (perché C_n è definita in base ad C_{n-1} e C_{n-2}, cioè in base ai due termini che lo precedono).

I numeri di Catalan forniscono i numeri di molte configurazioni discrete.

Il problema di Catalan

Il problema proposto da Catalan era il seguente:
stabilire in quanti modi si può ricondurre il prodotto di r fattori ad una successione di prodotti a coppie.
Sia * un'operazione non necessariamente associativa sull'insieme X. Se a1, a2, . . . , an sono elementi di X, quanti prodotti con questi fattori posso eseguire?

Ad esempio,
abbiamo le seguenti possibilità:

- per n=3 a1 * (a2 * a3), (a1 * a2) * a3;
- per n=4
  a1 * (a2 * (a3 * a4)), a1 * ((a2 * a3) * a4),
  (a1 * a2) * (a3 * a4), ((a1 * a2) * a3) * a4.
  (a1 * (a2 * a3)) * a4,

Porremo, quindi, $C_0 = 0$, $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$.

L'esempio mostra immediatamente che il problema può enunciarsi anche nel modo seguente:

"stabilire in quanti modi si possono disporre (r−1) coppie di parentesi in modo che siano annidate correttamente".

Ogni parentesi chiusa deve essere preceduta da una parentesi aperta che le corrisponde.
In ambedue i casi il numero cercato è C_r, come definito da una successione di Catalan.

Il problema appena enunciato può porsi in diverse altre forme.
Qui ne prendo in considerazione una che risulta particolarmente comoda.

Cammini di Dyck

Definizione. Un cammino di Dyck è un cammino $H = (s_0, \ldots, s_n)$ in cui $s_0 = (0, 0)$, $s_n = (2n, 0)$, costituito soltanto di due tipi di passi:
passi diagonali superiori

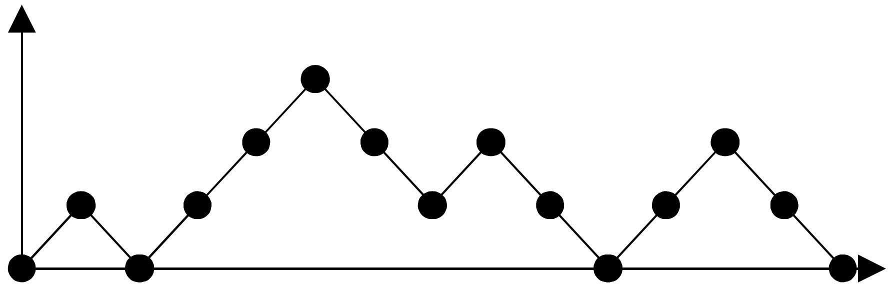
$U = (1,1)$ tali che se $s_i = (x, y)$, allora
$s_{i+1} = s_i + U = (x + 1, y +1)$,

o passi diagonali inferiori

$$D = (1,-1) \text{ tali che se } s_i = (x, y), \text{ allora}$$
$$s_{i+1} = s_i + D = (x + 1, y - 1),$$

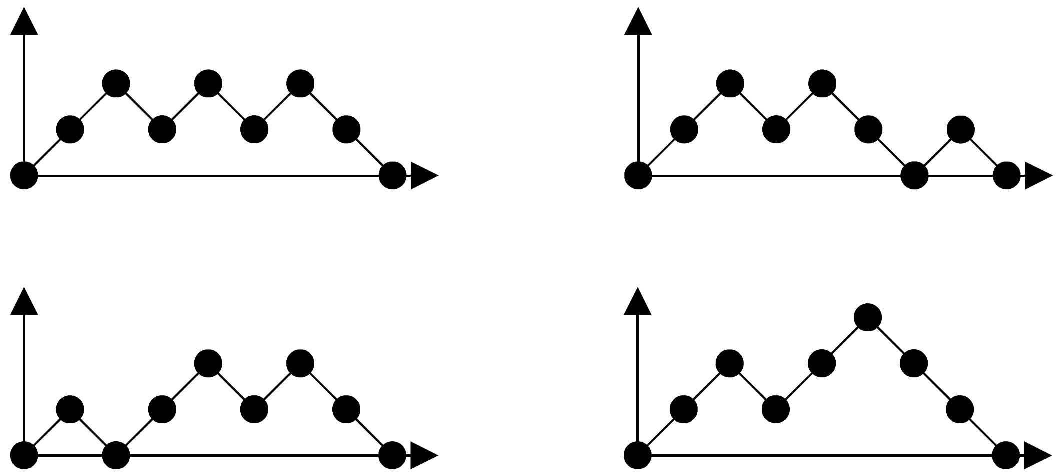
dove, in ogni sottocammino $H_k = (s_0, \ldots, s_k)$ con $0 \leq k \leq 2n$, il numero dei passi diagonali superiori è sempre maggiore o, al più, uguale al numero dei passi diagonali inferiori e il numero totale di passi diagonali superiori è uguale al numero dei passi diagonali inferiori.
Ad esempio la stringa

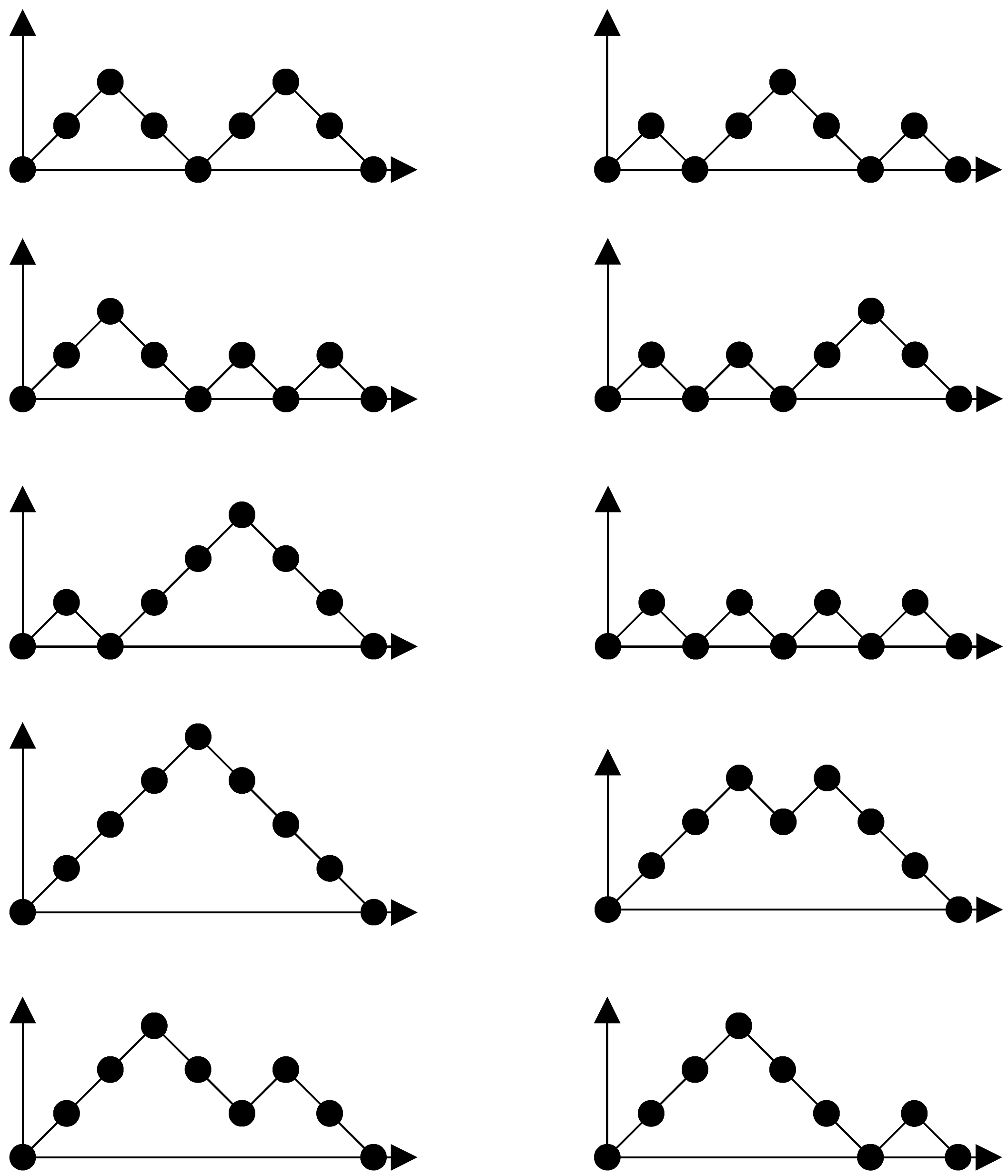
(UDUUUDDUDDUUDD)



Quindi, è facile verificare che

- per n = 1 (ossia un passo U e uno D) abbiamo un solo cammino,
- per n = 2 abbiamo invece 2 possibili configurazioni
- per n = 3 sono 5
- ora contiamo per n = 4





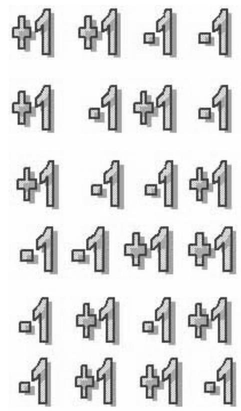
Sono in tutto 14. Questo è il quinto termine della successione di Catalan.
La successione di numeri che troveremmo, continuando l'analisi dei cammini di Dick, ci porterebbe a determinare tutti i numeri di Catalan.

Questa formula ha portato, inoltre, a soluzione il problema di ***Erdos*** e quello di ***Eulero*** circa la suddivisione dei poligoni in triangoli.

Erdös

Erdös è considerato uno dei grandi matematici di questo secolo, ha posto e risolto migliaia di problemi nella teoria dei numeri, il suo argomento preferito; è stato tra i fondatori della matematica discreta, che è alla base dell'informatica, e ha dato contributi essenziali in diversi altri settori della matematica moderna.

Il problema presupposto da questo matematico presuppone di avere lo stesso numero di "+1" e "-1" e di metterli in fila secondo un ordine qualsiasi. I matematici si vantano del loro rapporto con Erdös citando quello che ad esempio, con due "+1" e due "-1" possiamo costruire le sei righe diverse della tabella, se l'ordine può essere qualsiasi. Naturalmente la somma di tutti termini di una riga è sempre uguale a zero.



Studiamo però le somme parziali delle diverse righe. Nella prima riga del nostro esempio precedente, la somma è +1 dopo il primo termine, +2 dopo il secondo termine, + 1 dopo il terzo termine e 0 dopo il quarto termine. Il problema consiste nel determinare il numero di righe che non hanno ***mai somme negative***.
Sempre nel nostro esempio, con due "+1" e due "-1", cioè con $n = 2$, soltanto due delle sei righe diverse che possiamo costruire non hanno somme parziali negative: la prima e la seconda della tabella.
Con $n = 3$ possiamo costruire 20 righe diverse, di cui soltanto 5 hanno somme parziali non negative e si può verificare, con un po' di pazienza, che con $n = 4$ si hanno 70 righe diverse, di cui soltanto 14 soddisfano alla condizione richiesta.

Se si prosegue in questo modo, si troverà la successione di numeri di Catalan.

Il problema del teatro

Questi calcoli, però, non sono soltanto un gioco divertente, ma possono avere diverse applicazioni.
Pensiamo, ad esempio, alla coda che si può formare al botteghino di un teatro, in una situazione necessariamente ancora molto schematica: nel caso in cui il biglietto di ingresso costi 25 euro e alla cassa si presenti un gruppo di persone, metà delle quali con la cifra esatta in contanti e l'altra metà con un biglietto da 50 euro.
In quanti modi diversi si possano mettere in fila queste persone per consentire al cassiere di iniziare con la cassa vuota e di avere poi sempre a disposizione il resto necessario?
E' evidente l'analogia con il problema di Erdös.

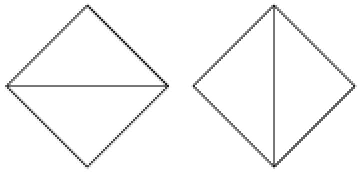
Il problema di Eulero

La triangolazione dei poligoni convessi con n + 2 lati.

Propongo ora il famoso problema già affrontato da Eulero che risoolverò mediante l'evidenza grafica:

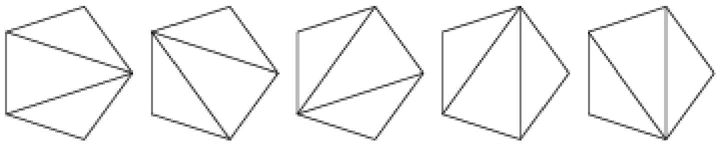
“in quanti modi è possibile suddividere un poligono convesso, con $n + 2$ lati, in triangoli, ottenuti tracciando segmenti rettilinei (che non si intersecano) tra suoi vertici non adiacenti?”

$n = 2$



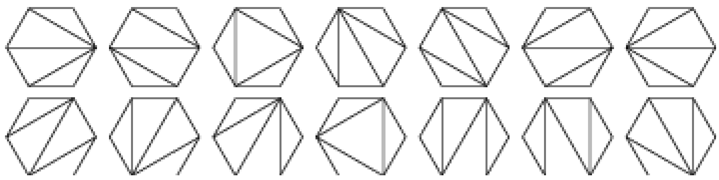
$C_2 = 2$

$n = 3$



$C_3 = 5$

$n = 4$



$C_4 = 14$

Ecco che i numeri di Catalan danno soluzione anche a questo problema!

Bibliografia

- Paul Hoffman, *L'uomo che amava solo i numeri*, Mondadori, 1999
- http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/Erdos/Erdos.htm
- http://www.batmath.it/matematica/a_caos/pg1.htm
- http://mathworld.wolfram.com/CatalansProblem.html
- http://books.google.it/books?id=CynRMm5qTmQC&pg=PA269&lpg=PA269&dq=eulero+catalan&source=bl&ots=mr-zMO1kKQ&sig=NXx-bAzovP9B4gR_Vg6N0xE-kB0&hl=it&ei=18oaSvq-KYLR-Aa63plr&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4
- http://it.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
- http://www.unisi.it