Derangement

Laboratorio di combinatorica

Marta Lucchini, II anno

Anno accademico 2008-2009

Introduzione

Un derangement (o dismutazione) è una permutazione che non fissa alcun punto: se S_n è il gruppo delle permutazioni su n elementi e φ è un elemento di S_n, φ è un derangement se φ(x) ≠ x, ∀ x ∈ {1,2,…,n}.
Il problema di contare i derangement fu posto nel 1708 da Pierre Raymond de Montmort, che lo risolse nel 1713; negli stessi anni, se ne occuparono anche Nicholas Bernoulli, che lo affrontò usando il principio di inclusione-esclusione, ed Eulero, che lo applicò a un problema di calcolo delle probabilità.

Primi esempi

Da un punto di vista informale, il problema può essere formulato in più modi equivalenti.
Problema della segretaria distratta: una segretaria ha n lettere e n buste con le intestazioni relative. Ma è distratta: in quanti modi diversi può combinare lettere e buste in modo che a nessuno dei destinatari sarà inviata la lettera che aspetta?
Problema dei cappelli: un conte organizza una grande festa. Puntuali, arrivano gli invitati. All'ingresso, ciascuno consegna il proprio cappello al maggiordomo. Ma i cappelli sono difficilmente distinguibili. In quanti modi diversi, alla fine della festa, il maggiordomo potrà restituire i cappelli, in modo che nessuno degli invitati riavrà il proprio?

Contare i derangement

Ricorsione

Assumiamo che φ_n sia un derangement di {1,2,…,n} (φ_n è quindi uno degli n! elementi di S_n).
Per qualche k in {1,2,…,n-1}, vale φ_n(n) = k.
Possiamo scambiare k e n componendo φ_n con il 2-ciclo (k n).
Denotiamo con φ_{n-1} la permutazione ottenuta da questa composizione:

$$\varphi_{n-1} = (k\ \ n)\ \varphi_n \qquad (1)$$

Per costruzione, φ_{n-1} (n) = n. Per quanto riguarda k abbiamo due possibilità: può essere

- φ_{n-1} (k) ≠ k,
- φ_{n-1} (k) = k.

Nel primo caso, φ_{n-1} risulta essere un derangement dell'insieme {1,2,…,n-1}.
Nel secondo caso, applicando a destra e a sinistra di φ_{n-1} il 2-ciclo (k n-1), otteniamo

$$\varphi_{n-2} = (k\ \ n\text{-}1)\, \varphi_{n-1}(k\ \ n\text{-}1) \qquad (2)$$

che è un derangement di {1,2,…,n-2}. Infatti n-1 viene mandato in se stesso: nel primo ciclo (da destra) viene mandato in k, k è fissato da φ_{n-1} e torna in n-1 nell'ultimo ciclo. k sicuramente non è fissato: la sua immagine mediante il primo ciclo è n-1; se φ_{n-1}(n-1) = x ≠ k, allora φ_{n-2}(k) = x; se invece φ_{n-1}(n-1) = k, allora φ_{n-2}(k) = n-1.

Diamo un esempio per ciascuno di questi due casi, con n=5:

1) φ_5: 1 2 3 4 5
   3 4 1 5 2 ,
   dove gli elementi della seconda riga sono le immagini dei corrispondenti della prima. Alternativamente, possiamo scrivere l'applicazione come composizione di due cicli: φ_5 = (1 3)(2 4 5).
   Qui φ_n(n) = φ_5(5) = 2 = k.
   Componendo (2 5) con φ_5 otteniamo:
   φ_4 = (2 5)(1 3)(2 4 5) = (2 4)(1 3), che risulta essere un derangement di {1,2,3,4}, dal momento che anche φ_4(k) = φ_4(2) ≠ 2.
2) φ_5: 1 2 3 4 5, cioè φ_5 = (1 3 4)(2 5).
   3 5 4 1 2
   Come prima, φ_4 = (2 5)(1 3 4)(2 5) = (1 3 4).
   In questo caso, la composizione fissa sia n=5 che k=2.
   Allora avremo che φ_3 = (2 4)(1 3 4)(2 4) = (1 3 2) è un derangement di {1,2,3}.

Poiché l'immagine di n, in un derangement, può assumere n-1 valori diversi, ci sono n-1 modi per passare da un derangement di {1,2,…,n} a uno di {1,2,…,n-1} e n-1 modi per passare da un derangement di {1,2,…,n} a uno di {1,2,…,n-2}.

Vale anche l'opposto, cioè posso invertire le relazioni (*1*) e (*2*), ottenendo:

$$\varphi_n = (k\ \ n)\ \varphi_{n-1},$$
$$\varphi_n = (k\ \ n)(k\ \ n\text{-}1)\ \varphi_{n-2}\ (k\ \ n\text{-}1),$$

k ∈ {1,2,…,n-1}.
Questo permette di esprimere il numero di derangement d_n su un insieme {1,2,…,n} mediante la seguente formula ricorsiva:

$$\boldsymbol{d_n = (n - 1)(d_{n-1} + d_{n-2}),}$$

con d_0= 1 e d_1= 0.
I d_n si dicono sottofattoriali. I primi 13 sottofattoriali (da n=0 a n=12) sono:
1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, …

Principio di inclusione-esclusione
Un secondo approccio al problema consiste nell'applicare il *principio di inclusione-esclusione*. Partiamo con un esempio.
Un gruppo di 30 amici si trova per condividere uno dei menù più classici del sabato sera: una pizza, una birra, un dolce. Tre sono i tipi di dolce disponibili: le fragole, il gelato e il budino al cioccolato.
Non sono pochi gli indecisi. Infatti c'è a chi piace più di una di queste cose: a 17 persone piacciono le fragole (ma non necessariamente solo le fragole), a 12 persone piace il budino e a 15 il gelato.
Sapendo che a 6 persone piacciono gelato e budino, a 8 fragole e gelato, a 6 fragole e budino, e che a 2 persone piace tutto, ci chiediamo a quanti non piace niente.
Il principio di inclusione-esclusione ci permette di contare il numero di persone a cui piace almeno una cosa.
Dal punto di vista formale, il principio si esprime così: dati n insiemi di ordine finito $A_1, A_2, \dots, A_n$,

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i\neq j}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i\neq j\neq k}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Allora la cardinalità x dell'insieme delle persone a cui piace almeno una cosa si ottiene così: x = (17 + 12 + 15) – (6 + 8 + 6) + 2 = 44 – 20 + 2 = 26.

Sottraendo x dal numero totale di persone, ricaviamo che 4 sono le persone che, loro malgrado, non sceglieranno alcun dolce.
Trasferiamo ora questo problema a quello iniziale. Facciamo corrispondere biunivocamente le N persone della pizza del sabato sera alle permutazioni di un insieme di n numeri naturali, i quali hanno il ruolo dei dolci tra cui scegliere. (Scelgo N in modo che sia n! = N per qualche n.) Le persone a cui piace una sola cosa diventano le permutazioni che fissano un solo elemento, quelle a cui piacciono due cose diventano le permutazioni che fissano due elementi, e così via. Le persone a cui non piace niente corrispondono proprio ai derangement.
Osserviamo che ci sono $\binom{n}{1}$ modi di fissare un elemento della permutazione, mentre gli altri elementi possono variare in (n-1)! modi. Quindi ci sono $\binom{n}{1}(n-1)!$ modi di costruire una permutazione che fissa un elemento. Analogamente, ce ne sono $\binom{n}{2}(n-2)!$ per costruirne una che fissa due elementi, e così via.
Applicando come prima il principio di inclusione-esclusione, otteniamo che il numero di permutazioni che fissano almeno un elemento è:

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots \pm \binom{n-1}{n}1! \mp \binom{n}{n}0!$$

Sottraiamo questo numero alla cardinalità di S_n, cioè n!, e otteniamo che il numero di permutazioni senza punti fissi è dato da:

$$\begin{aligned} d_n &= n! - [\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots \pm \binom{n}{n}0!] = \\ &= n! - \frac{n(n-1)!}{1!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!} + \ldots \pm \frac{n!}{n!} = \\ &= n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}) \end{aligned}$$

Più sinteticamente, $d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.
Dal punto di vista probabilistico, abbiamo che la probabilità (casi favorevoli su casi possibili) che una permutazione scelta a caso sia un derangement è data da $\frac{d_n}{n!}$, che converge a $\frac{1}{e}$, infatti

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$$

Le jeu de rencontre

Negli anni '40 e '50 del diciottesimo secolo, anche Eulero, che all'epoca lavorava alla corte di Federico il grande di Prussia, si occupò, seppure indirettamente, del problema dei derangement.

Il suo è fondamentalmente un problema di calcolo delle probabilità: il gioco delle coincidenze coinvolge due giocatori, che Eulero chiama A e B. Entrambi hanno a disposizione lo stesso numero di carte. Le voltano una a una. Se in corrispondenza di uno stesso turno, i due giocatori voltano la stessa carta, A vince. Se invece, finite le carte, non c'è stata nessuna coincidenza, vince B.

Si vuole calcolare la probabilità che A vinca.

Facciamo un paio di ipotesi che semplificano il problema senza perdere in generalità: le carte sono numerate da 1 a n (non ci sono le figure); A volta le carte nell'ordine 1,2,…,n, cosicché l'esito del gioco dipende solo dall'ordine delle carte di B.

Consideriamo i casi più semplici. Per n=1 la questione è banale: A vince sicuramente. Per n=2, sono due i modi in cui B può voltare le proprie carte, per cui A ha il 50% di probabilità di vincere.

Se n=3, data la disposizione delle carte di A, le possibili disposizioni delle carte di B sono:

A	B					
1	1	1	2	2	3	3
2	2	3	1	3	1	2
3	3	2	3	1	2	1

In due casi (il primo e il secondo), A vince al primo colpo, in un caso (l'ultimo) vince al secondo, e in un caso (il terzo) vince al terzo. Quindi la probabilità che A vinca è pari a 4/6 = 2/3.

Estendiamo il gioco al caso di n carte: chiamiamo *a* il numero di casi in cui A vince al primo tentativo, *b* il numero di casi per il secondo tentativo, *c* per il terzo…

Le possibili configurazioni delle carte per cui A vince al primo tentativo sono (n-1)!, cioè *a* = (n-1)!. Infatti questo è il numero delle permutazioni su n elementi che ne lasciano fisso uno.

Il numero di eventi che determinano la vittoria di A al secondo tentativo è *b* = (n-1)! – (n-2)!. Infatti le permutazioni che fissano un elemento (la seconda carta in questo caso) è ancora (n-1)!. Ma tra queste vanno escluse le (n-2)! che fissano anche il primo, in corrispondenza delle quali A avrebbe già vinto al primo turno.

Con ragionamenti simili, otteniamo c = (n-1)! – 2(n-2)! + (n-3)!. Viene sottratto due volte (n-2)! per escludere gli (n-2)! casi in cui coincidono la prima e la terza carta e gli altri (n-2)! in cui coincidono la seconda e la terza; (n-3)! invece è sommato perché era stato sottratto due volte (infatti i 2(n-2)! casi considerati prima includono anche quelli in cui coincidono la prima, la seconda e la terza carta).

Abbiamo che:

a = (n-1)!
b = (n-1)! – (n-2)!
c = (n-1)! – 2(n-2)! + (n-3)!
d = (n-1)! – 3(n-2)! + 3(n-3)! – (n-4)!
…

Le probabilità che A vinca al primo, secondo, terzo, quarto tentativo si ottengono dividendo rispettivamente *a, b, c, d* per n!:

$P_a = \frac{1}{n}$
$P_b = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)}$
$P_c = \frac{1}{n} - \frac{2}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$
$P_d = \frac{1}{n} - \frac{3}{n(n-1)} + \frac{3}{n(n-1)(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$
…
Osserviamo che i coefficienti dei numeratori, a meno del segno, sono le righe del triangolo di Tartaglia!
La probabilità che a un certo punto A vinca è data dalla somma delle probabilità.
Sommando su ciascuna colonna, chiamato V l'evento "A vince", troviamo che

$$P(V) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

Di conseguenza, la probabilità che vinca B è data da 1 – P(V), di cui calcoliamo anche il limite per n molto grande:

$$\mathbf{1 - P(V) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}}$$

Questa è la probabilità che non vi siano coincidenze tra le carte dei due giocatori, cioè la probabilità di ottenere un derangement.
Notiamo con soddisfazione che i problemi del dolce post-pizza e quello del gioco delle coincidenze, equivalenti sebbene muovano da presupposti diversi, portano con la stessa eleganza a un’unica conclusione.