Università di Torino

Facoltà di Scienze M.F.N.

Dipartimento di Matematica "G. Peano"

Laboratorio di combinatorica

La successione di Fibonacci

Alessia Pellegrino

Matricola 700548

INDICE

BIOGRAFIA

Leonardo Pisano, detto Fibonacci (Fibonacci stà per *filius Bonacii*) nacque a Pisa intorno al 1170. Suo padre era segretario della Repubblica di Pisa e responsabile a partire dal 1192 del commercio pisano presso la colonia di Bugia, in Algeria. Dopo il 1192, Bonacci portò suo figlio con lui a Bugia. Il padre voleva che Leonardo diventasse un mercante e così si interessò della sua istruzione, in particolare curò l'apprendimento delle tecniche del calcolo, specialmente quelle che riguardavano le cifre indo-arabiche, che non erano ancora state introdotte in Europa. In seguito Bonacci si assicurò l'aiuto di suo figlio per portare avanti il commercio della repubblica pisana e lo mandò in viaggio in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza. Leonardo colse l'opportunità offertagli dai suoi viaggi all'estero per studiare e imparare le tecniche matematiche impiegate in queste regioni. Intorno al 1200, Fibonacci tornò a Pisa dove per i seguenti 25 anni lavorò alle sue personali composizioni matematiche. Dei suoi libri, abbiamo ancora copie del *Liber abaci* (1202), *Practica geometriae* (1220), Flos (1225), e *Liber quadratorum*. L'opera più importante è il *Liber abaci*: è un lavoro, suddiviso in quindici capitoli, contenente quasi tutte le conoscenze aritmetiche e algebriche ed ha avuto un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica dell'Europa occidentale. In particolare la numerazione indo-arabica (I capitolo), che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano: pertanto egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, corrispondente allo zero "0", per indicare le posizioni vacanti.

Certamente, molti dei problemi che Fibonacci considera nel *Liber abbaci* erano simili a quelli che apparivano nelle fonti arabe. La seconda parte del *Liber abaci* contiene un'ampia raccolta dei problemi rivolti ai mercanti. Essi si riferiscono al prezzo dei prodotti, e insegnano come calcolare il profitto negli affari, come convertire il denaro nelle varie monete in uso negli stati mediterranei, ed altri problemi ancora di origine cinese. Un problema, nella terza parte del *Liber abaci*, portò all'introduzione dei numeri di Fibonacci e della sequenza di Fibonacci, per la quali è ricordato ancora oggi.

Un altro dei libri di Fibonacci è il *Practica geometriae*, scritto nel 1220 e dedicato a Dominicus Hispanus. Esso contiene un'ampia raccolta di problemi geometrici, distribuiti in otto capitoli, unitamente a teoremi basati su *Gli Elementi* di Euclide e sulle divisioni sempre di Euclide. Il *Liber quadratorum*, scritto nel 1225, è un lavoro complesso ed ampio. Il nome del libro significa il libro dei quadrati ed è un libro sulla teoria dei numeri che, tra le altre cose, esamina i metodi per trovare il triplo pitagorico.

La reputazione di Leonardo come matematico divenne così grande che l'imperatore Federico II gli chiese un'udienza mentre era Pisa nel 1225. Dopo il 1228 non si sa in sostanza niente della vita di Leonardo tranne il decreto della Repubblica di Pisa che gli conferì il titolo di "Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo" a riconoscimento dei grandi progressi che apportò alla matematica.

Fibonacci morì qualche tempo dopo il 1240, presumibilmente a Pisa.

Anche al giorno d'oggi la fama di Leonardo è tale che esiste un'intera pubblicazione dedicata ai suoi studi: il "Fibonacci Quarterly", periodico matematico dedicato interamente all'aritmetica connessa alla sequenza di Fibonacci. Al matematico è stato anche dedicato un asteroide, 6765 Fibonacci.

ORIGINE DELLA SUCCESSIONE

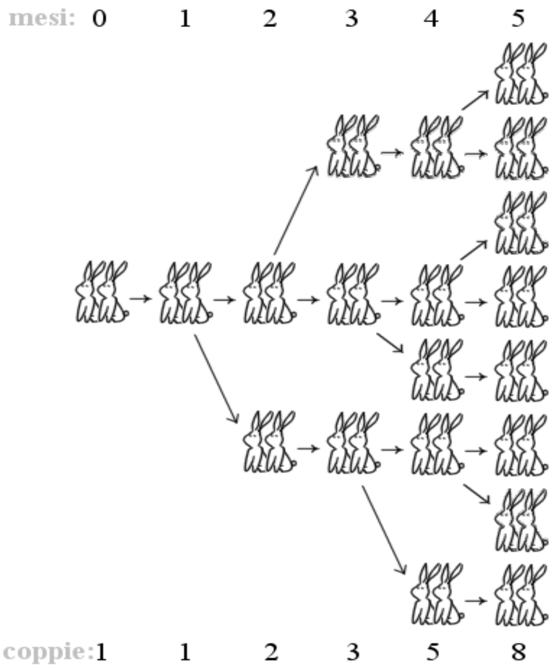
Nel 1223 a Pisa, l'imperatore Federico II di Svevia, assistette a un singolare torneo tra abacisti e algoritmisti: in quella gara infatti si dimostrò che col metodo posizionale indiano appreso dagli arabi si poteva calcolare più velocemente di qualsiasi abaco.

Problema

«Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.» *Liber Abaci*

Fibonacci, vinse la gara dando al test una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato.

Soluzione



Per natura ogni coppia di conigli genera in un mese un’altra coppia, e cominciano a procreare a partire dal secondo mese di vita.

Il primo mese c’è solo una coppia di conigli, il secondo mese ce ne sono 2 di cui una fertile, quindi il terzo ce ne sono 3 di cui 2 fertili, quindi il quarto mese ce ne sono 5 di cui 3 fertili, quindi il quinto mese ce ne sono 8 di cui 5 fertili e così via.

Nasce così la celebre successione di Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

* i primi 2 elementi sono 1, 1;

* ogni altro elemento è dato dalla somma dei due che lo precedono.

Indicando con F(n) o F_n il numero di coppie presenti nel mese n, la successione di Fibonacci, diventa

* F(1) = 1
* F(2) = 1
* F(n) = F(n-1)+F(n-2) nel mese n-esimo, n>2

In base a questa definizione si assume convenzionalmente F(0) = 0, affinchè la relazione ricorsiva F(n) = F(n-1)+F(n-2) sia valida anche per n=2

La successione di Fibonacci ha portato ad approfondire moltissimi ambiti della matematica e delle scienze naturali. Tuttavia pur avendo scoperto questa importante successione, Fibonacci non ne colse molti aspetti. Solo quattro secoli più tardi, Keplero osservò che il rapporto tra due termini successivi, tendeva alla Sezione Aurea.

LE PROPRIETA' DELLA SUCCESSIONE

- Due numeri di Fibonacci consecutivi sono coprimi.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esista d>1 che divide F(n) e F(n+1). Dividerà anche F(n-1) = F(n+1) - F(n).

Continuando a ritroso d dovrà dividere anche F(2) =1, il che è assurdo.

- Per ogni n e per ogni K appartenenti a N risulta

$$F(n+k) = F(k)F(n+1) + F(k-1)F(n)$$

Dimostrazione

Fissato k, si procede per induzione su n. Per n=1 la relazione diventa F(k+1) = F(K)F(2) + F(k-1)F(1) = F(k) + F(k-1) che è vera. Si suppone quindi vera la formula vera per ogni $0 \leq m < n$ e si dimostra per n. Per l'induzione ammessa valgono le seguenti relazioni:

$$F(n-1+k) = F(k)F(n) + F(k-1)F(n-1)$$
$$F(n-2+k) = F(k)F(n-1) + F(k-1)F(n-2)$$

Sommando membro a membro , le due uguaglianze, si ottiene:

$$F(n-1+k) + F(n-2+k) = F(n+k) =$$
$$=F(k)[(F(n) + F(n-1)] + F(k-1)[F(n-1) + F(n-2)] =$$
$$=F(k)F(n+1) + F(k-1)F(n)$$

Si può inoltre dimostrare che F(kn) è multiplo di F(n).

Anche in questo caso si procede per induzione su k.

Per k=1 è ovvia. Si suppone che F(hm) sia multiplo di F(n) per ogni $m \leq k$ e si dimostra per k+1. Per la precedente relazione si ha:

$$F[(k+1)n] = F(kn+n) = F(n)F(k+1) + F(n-1)F(kn).$$

Per induzione, sia F(n) sia F(kn) sono multipli di F(n), quindi lo sarà anche F[(k+1)n].

- Il massimo comun divisore di due numeri di Fibonacci F(n) e F(m) è ancora un numero di Fibonacci, in particolare è il numero corrispondente al massimo comun divisore di n e m:

$$MCD(F(m);F(n))=F(d), \quad d=MCD(m;n)$$

Questa proprietà fu scoperta nel 1876 da Edouard Lucas (1842-1891), autore della classica opera *Recreation Mathematiques*.

Esempio: F (10) = 55, F(5) = 5

$$MCD(F(10),F(5)) = F(MCD(10,5)) = F(5) = 5$$

Da questo segue che F(n) è divisibile per F(m) se e solo se n è divisibile per m. Questa proprietà è importante perché ne segue che un numero di Fibonacci F(n) può essere un numero primo solamente se n stesso è un numero primo, con l'unica eccezione di F(4) = 3 (l'unico numero di Fibonacci per cui potrebbe essere divisibile è F(2) = 1).

- Il quadrato di ogni numero di Fibonacci differisce di uno dal prodotto dei due numeri di fianco ad esso. La differenza è, alternativamente, più o meno 1, via via che la serie continua.

Tale proprietà è nota come *identità di Cassini*, scoperta nel 1680 da Jean-Dominique Cassini.

Esempio: Il quadrato del 5° numero di Fibonacci è 25, che differisce di +1 dal prodotto del 4° e del 6° numero, che è $3*8=24$.

Il quadrato del 6° numero, 64, invece, differisce di -1 dal prodotto del 5° e del 7° numero, che è $13*5=65$.

- Sommando i primi n numeri di Fibonacci ed aggiungendo 1, il risultato è sempre uguale al numero (n+2) di Fibonacci, ovvero al numero due volte dopo l'ultimo addizionato.

Esempio: Sommando i primi 5 numeri di Fibonacci si ottiene 12, ed aggiungendo +1 , si ottiene il 7° numero di Fibonacci che è 13.

- Se invece di sommare tutti i numeri se ne somma uno sì ed uno no, il risultato è sempre uguale al numero successivo all'ultimo addizionato.

Esempio: Sommando un numero ogni due dei primi nove si ottiene:

1+2+5+13+34 = 55 , che corrisponde al decimo numero.

- Se si somma il quadrato di un numero F(n) con il quadrato del suo successivo F(n+1) si ottiene il F(2n+1) numero della sequenza.

Esempio: Il quarto numero è il 3, il quinto il 5.
La somma dei due quadrati è $3*3 + 5*5 = 9 + 25 = 34$, ovvero il nono numero.

- Per quattro numeri di Fibonacci consecutivi qualsiasi, chiamati F(n), F(n+1), F(n+2), F(n+3) è sempre valida la seguente relazione:

$$F^2(n+2) - F^2(n+1) = F(n) * F(n+3).$$

Esempio: Prendendo i numeri di Fibonacci dal quarto al settimo abbiamo: F(n)=3; F(n+1)=5; F(n+2)=8; F(n+3)=13. Si ha:

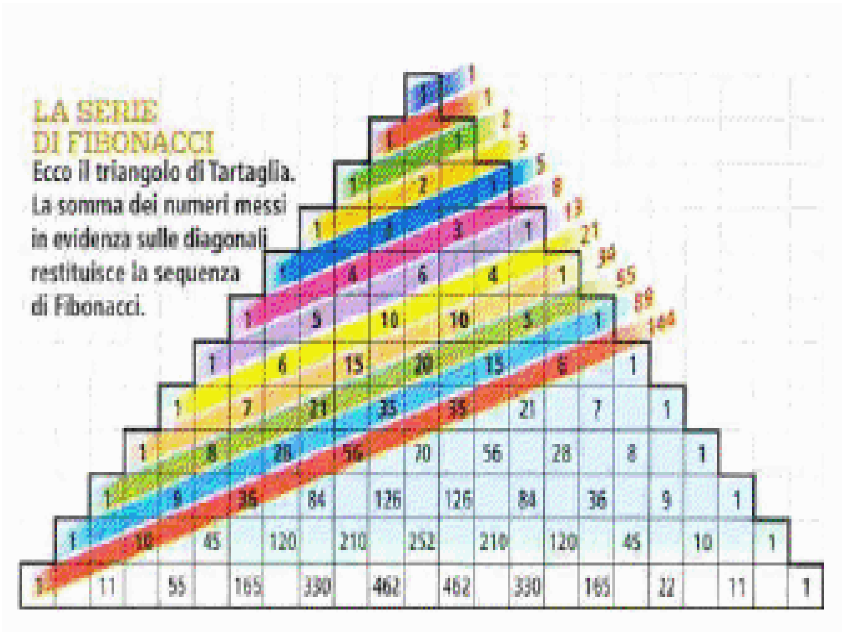
$$64 - 25 = 3 * 13 = 39.$$

- A parte il caso banale dello zero e dell'uno, l'unico numero di Fibonacci che risulta un quadrato perfetto è F(12), che è proprio $12*12=144$.
L'unico numero che risulta un cubo perfetto è F(6) = 8.

- Se dividiamo qualsiasi numero per il secondo che lo precede nella sequenza, otterremo sempre due come quoziente e come resto il numero che precede immediatamente il divisore.

Esempio: Prendiamo F(12) = 144 e lo dividiamo per F(10) = 55 otterremo 144:55= 2 e come resto 34 che è uguale a F(9)

➢ Dal triangolo di Tartaglia si possono ricavare i numeri di Fibonacci: si devono sommare i numeri delle diagonali evidenziate in figura



PROPRIETA' PRINCIPALE: SEZIONE AUREA

F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
F(n)/F(n-1)		1,0000	2,0000	1,5000	1,6667	1,6000	1,6250	1,6154	1,6190	1,6176	1,6182

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{F(n-1)} = \phi \quad \text{con} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887...$$

La proprietà principale è quella per cui il rapporto F(n)/ F(n-1) al tendere di n all'infinito tende al numero algebrico irrazionale chiamato sezione aurea, numero di Fidia o numero aureo. Viene così chiamato, perché le coppie di segmenti che lo genenerano producono insieme forme talmente armoniose e proporzionate (divina proporzione) da essere denominata, verso la fine dell'ottocento, "Sezione aurea" .

In geometria la sezione aurea di un segmento è quella parte del segmento che è medio proporzionale fra l'intero segmento e la parte di segmento rimanente.

AB: AS = AS : SB

Indichiamo con l la misura di AB e con x la misura di AS: la misura di SB è l – x. Determiniamo il valore di x in funzione di l.
Nella proporzione sostituiamo ai segmenti le misure delle rispettive lunghezze:
$l : x = x : (l - x)$
Applichiamo la proprietà fondamentale delle proporzioni:
$x^2 = l(l - x)$
$x^2 = l^2 - lx$
Ordiniamo l'equazione di secondo grado in x e risolviamola:
$x^2 + lx - l^2 = 0$

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2} = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-l - l\sqrt{5}}{2} & \text{NON ACCETTABILE} \\ \dfrac{-l + l\sqrt{5}}{2} = \dfrac{l(-1+\sqrt{5})}{2} = \end{cases}$$

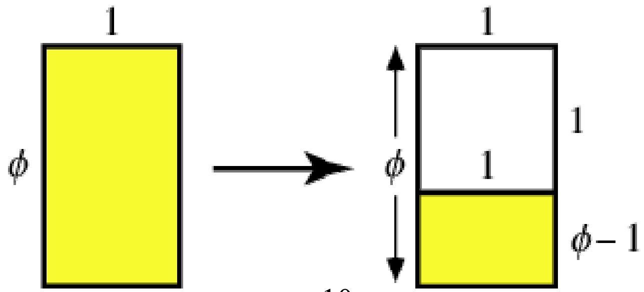
$$= \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l.$$

Pertanto il rapporto tra la sezione aurea di un segmento e il segmento stesso è:

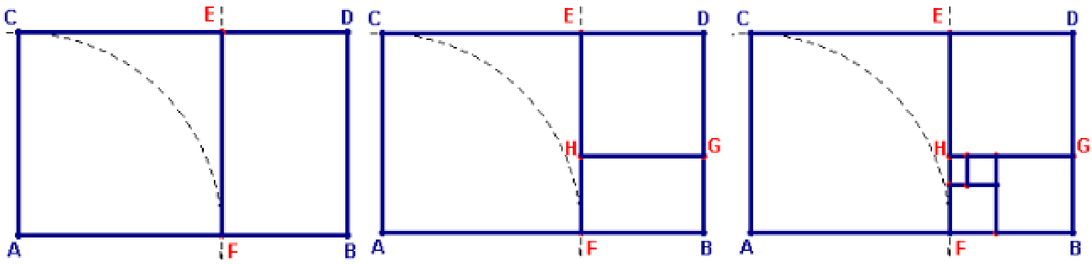
$$\frac{AS}{AB} = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2} = 0,6180339887...$$

Rettangolo aureo

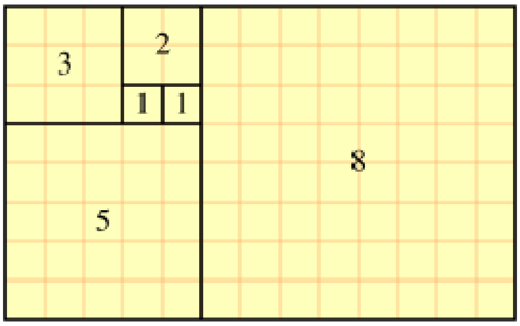


Il rettangolo aureo è quella particolare figura in cui il lato maggiore e il minore stanno tra loro in un rapporto pari a Φ. Se si prova a sottrarre dal rettangolo di partenza un area pari al quadrato generato dal lato minore, si otterrà un nuovo rettangolo ancora una volta in proporzione aurea; togliendo ancora un quadrato dal rettangolo "figlio" con lo stesso procedimento, si otterrà nuovamente un rettangolo rimpicciolito del fattore Φ.

Proseguendo, si otterranno dunque una serie di rettangoli sempre più piccoli, ma tutti simili.



Un modo per costruire questo tipo di rettangolo è quello di accostare in successione dei quadrati che abbiamo per lati i valori della successione di Fibonacci. In questo modo si creerà una successione di rettangoli sempre più vicini a quello aureo, ma è bene precisare che sarà sempre una approssimazione che non diventerà mai esatta: perché il rapporto aureo è un numero irrazionale, il che fa dei lati del rettangolo in esame due grandezze *incommensurabili*, per le quali, cioè, non esiste un sottomultiplo comune.

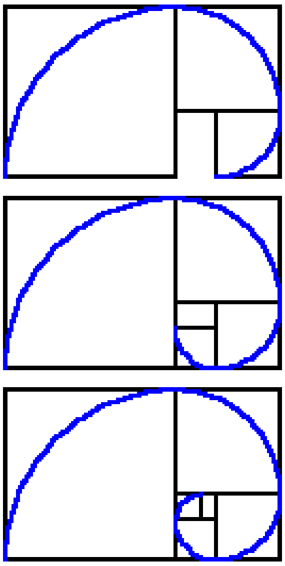


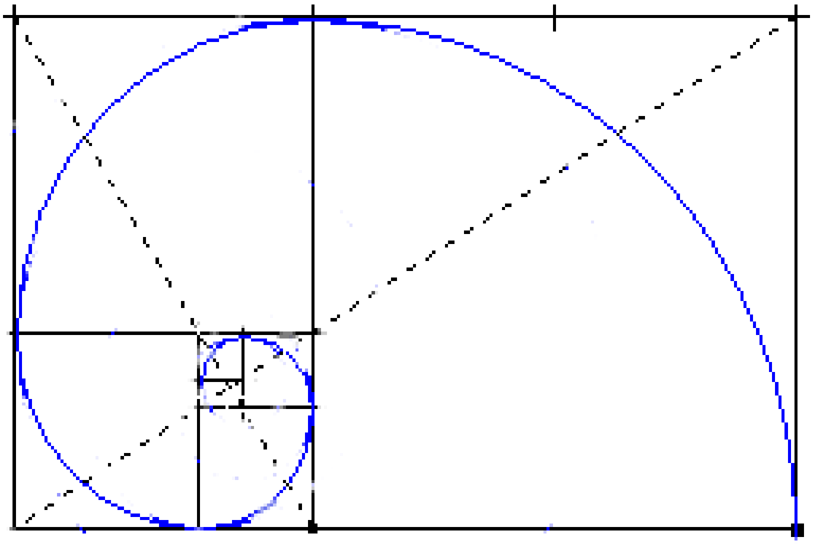
Spirale logaritmica

La spirale logaritmica è caratterizzata dal fatto che le distanze fra i bracci della spirale aumentano secondo una progressione geometrica; utilizzando i numeri di Fibonacci, si può ottenere dunque un particolare tipo di spirale logaritmica.

Riconsiderando il rettangolo aureo e la sua suddivisione in figure minori e simili, è possibile ottenere la creazione di questa spirale: essa è generata da archi di circonferenza che hanno come raggi i lati dei quadrati costruiti sui lati minori.

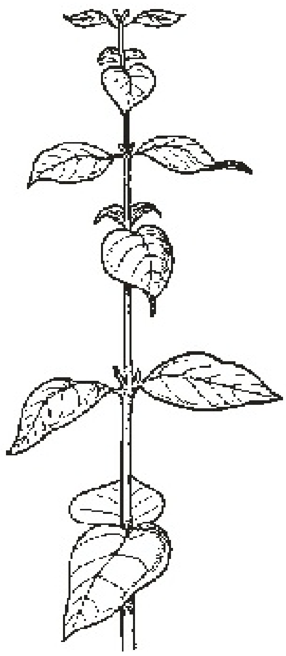
La spirale si sviluppa intorno a un punto detto "occhio di Dio", ossia il punto d'incontro tra le due diagonali che si intersecano in ciascuna coppia di rettangoli.





Manifestazioni della spirale in natura

La successione di Fibonacci ha un ruolo fondamentale nella *fillotassi*, ossia la disposizione delle foglie nel gambo di fiori e piante.

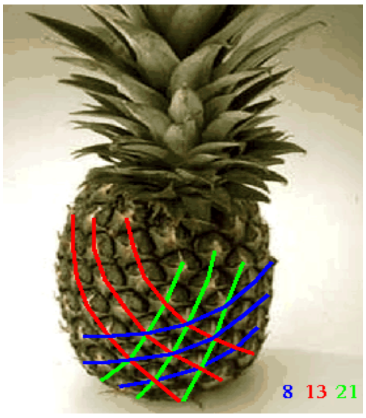


Nel regno vegetale, le foglie sui rami e i rami sul tronco tendono a disporsi in modo tale da avere una massima esposizione al sole: per questo motivo la loro successione segue un andamento rotatorio e spiraliforme.

Keplero, luminare della scienza del XVI e XVII secolo, fu il primo a scoprire intuitivamente il rapporto tra fillotassi e numeri di Fibonacci; nei suoi scritti egli afferma: "E' in modo paragonabile a questa serie che si sviluppa da sé [allusione alla natura ricorsiva della successione di Fibonacci] che, a mio avviso, funziona la naturale facoltà di accrescimento."

In effetti analizzando le spirali formate dalle foglie nei rami di alcuni organismi vegetali, prima di completare un giro seguendo l'andamento rotatorio si contano un numero di elementi appartenente alla serie di Fibonacci.

Uno dei più evidenti esempi di fillotassi basata sui numeri di Fibonacci è l'ananas. Ognuna delle squame che rivestono questo frutto appartiene a tre spirali diverse, evidenziate in figura: una che sale da sinistra verso destra ripidamente (verde),una con angolazione minore sempre nella stessa direzione (blu) e un'ultima da destra verso sinistra (rossa). Le quantità di queste spirali presenti coincidono con i numeri della successione di Fibonacci.



Allo stesso modo, anche le squame delle pigne e i semi del girasole sono disposte con andamenti spiraliformi secondo la serie di Fibonacci, in modo da essere uniformemente sparsi su tutta la corolla e non troppo ammassati al centro.

Un particolare mollusco chiamato Nautilus ha una conchiglia che assume la forma della spirale logaritmica. Il nautilus è classificato come "fossile vivente".

Questo animale nella sua conchiglia aumenta di grandezza e si costruisce camere sempre più spaziose, sigillando le precedenti ormai inutilizzabili perché troppo piccole. Così, mentre la conchiglia si allunga, il raggio aumenta in proporzione, creando la particolare forma a spirale logaritmica e facendo in modo di non mutare la forma del guscio.

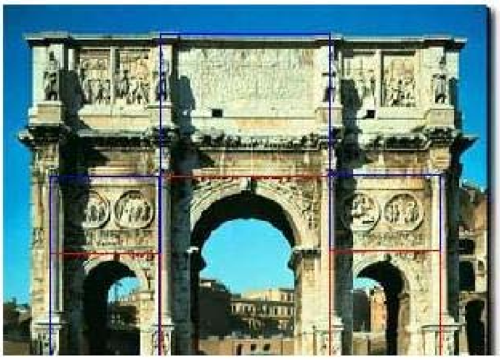
Manifestazioni della spirale nell'arte

La Sezione Aurea nel mondo pre-classico

Sia nei Megaliti di Stonehenge sia in alcune steli Babilonesi il rapporto aureo sembra essere individuabile, ma è opportuno precisare che le misure raggiungono sommariamente questo rapporto e non vi è alcun documento che assicuri l'individuazione della proporzione aurea in queste testimonianze antiche; tuttavia il fatto che popolazioni così antiche fondassero le loro opere d'arte su un canone apparentemente legato al rapporto aureo è un chiaro segnale di come questo sia indice di gradimento all'occhio umano in tutte le generazioni.

La Sezione Aurea nel mondo classico

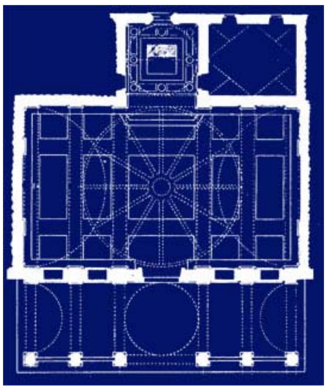
La civiltà classica greca si pose come scopo quello di unificare tutte le arti e le scienze secondo rapporti armonici: gli antichi architetti dunque nei loro edifici dovevano ricercare l'accordo tra le misure" mediante la ripetizione di rapporti proporzionali privilegiati. In particolare un celebre esempio di trionfo del rapporto divino come modulo è il Partenone dell'Acropoli di Atene, progettato dall'architetto Fidia, da cui deriva il nome *Phi* del Rapporto.



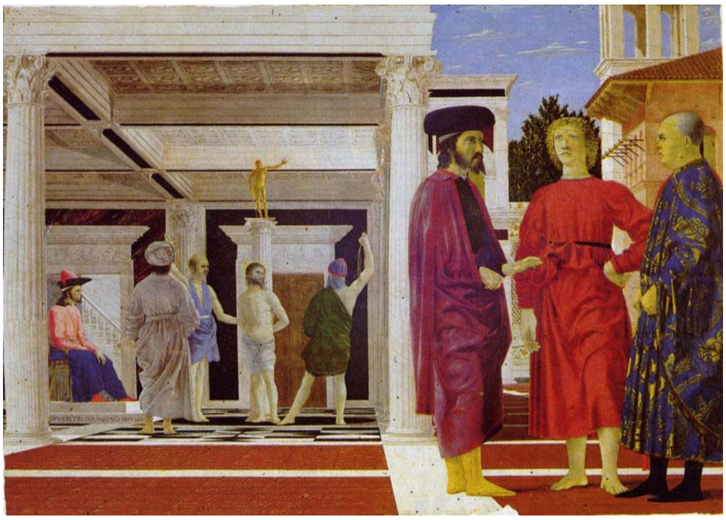
Anche in epoca romana, nell'arco di Costantino la divina proporzione venne rispettata integralmente: nella distribuzione dei tre settori del fronte suddivisi dalle colonne, nell'altezza dei fornici, nel rettangolo aureo di altezza complessiva della parte centrale da cui si ricava il quadrato aureo nella parte del fregio. I settori laterali sottostanti il fregio presi a sé ripropongono di nuovo il rettangolo aureo dopo aver tagliato il quadrato aureo (area dei medaglioni soprastanti i fornici), rettangolo che è comunque proporzionale al rettangolo aureo dell'area centrale.

La Sezione Aurea nel mondo Rinascimentale

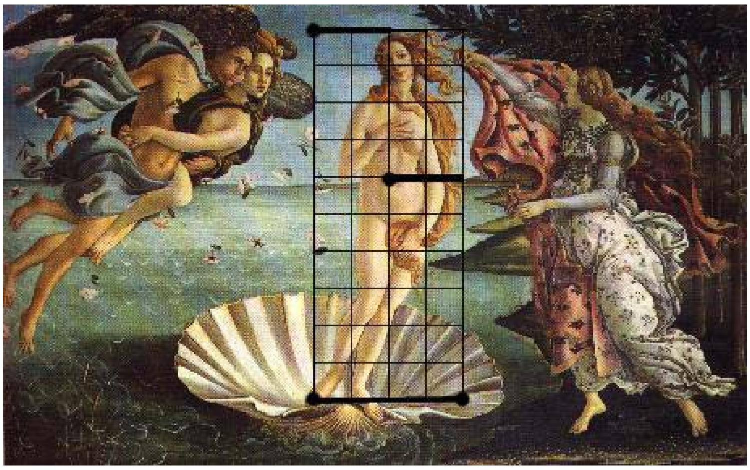
In questo periodo una delle caratteristiche fondamentali che deve possedere un'opera è quella della proporzione, oltre alla prospettiva, tecnica che trova il suo massimo sviluppo proprio in questi secoli.



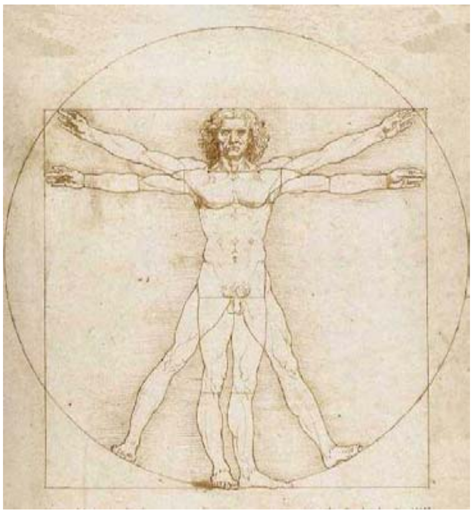
Non solo architetti, ma pittori, scultori e matematici sono alla ricerca della perfezione formale. Esempi ne sono:



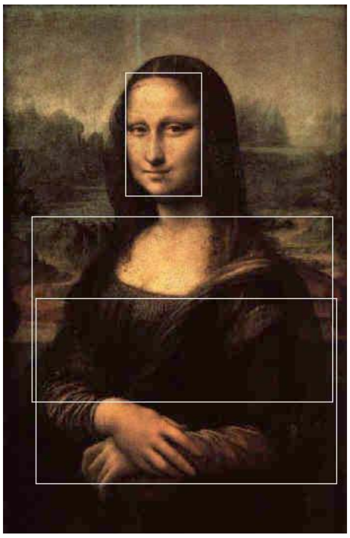
Piero della Francesca con la *Flagellazione di Cristo*, andando a misurare il rapporto tra la distanza delle due colonne che reggono l'atrio e la distanza tra la colonna di sinistra e quella a cui è legato Cristo, si otterrà il numero Φ. Allo stesso modo la divisione tra spazio interno ed esterno è diviso secondo la sezione aurea.



Sandro Botticelli, nella sua opera *La nascita di Venere,* cercando di generare un nudo perfetto, non potè fare a meno di inserire il rapporto aureo che donasse armonia alla figura della donna.

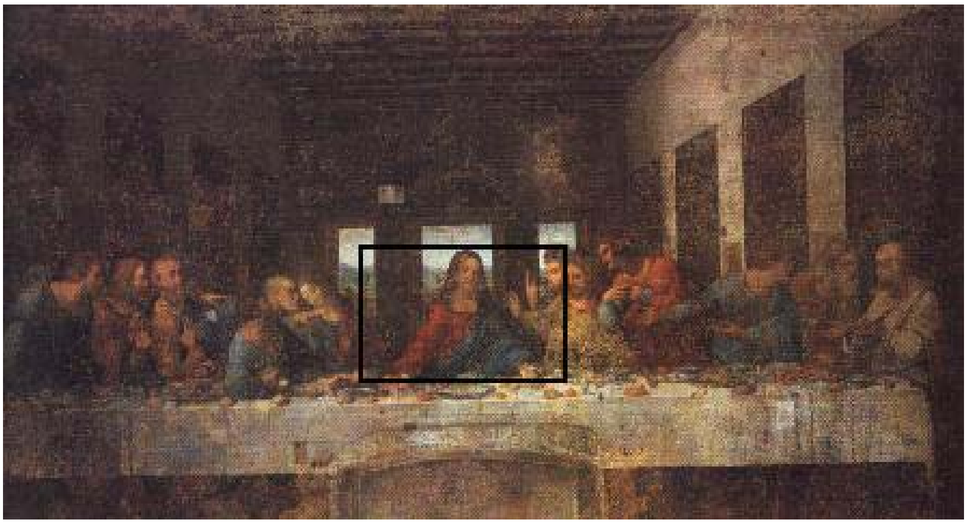


Leonardo Da Vinci, figura fondamentale del Rinascimento, afferma che "la pittura è la regina delle arti ed è strettamente legata alle scienze matematiche, cioè numero e misura, dette aritmetica e geometria, che trattano con somma verità della quantità discontinua e continua." Questo discorso trova la sua rappresentazione migliore nel celebre *Uomo vitruviano*, in cui egli stabilì che la proporzione umana è perfetta solo quando l'ombelico divide l'uomo in modo aureo



Leonardo in ogni sua opera rimane legato al numero Φ; considerando dunque la sua tela più importante, *La Gioconda*, si noti come il rettangolo aureo è individuabile in più parti. E’ possibile inserire in questo particolare rettangolo la disposizione generale del quadro, le dimensioni del viso, l’area che va dal collo a sopra le mani e ancora quella che va dalla scollatura dell’abito fino alla fine inferiore del braccio sinistro.

Nell’opera *L’ultima cena* il rapporto aureo viene utilizzato con una particolare funzione: essendo Gesù l’unica figura divina, Leonardo lo inscrive in un rettangolo dal rapporto dei lati pari a Φ.



FORMULA GENERALE

La caratteristica principale di questa sequenza sta nel fatto che essa è definita in maniera ricorsiva, quindi per trovare un numero della serie è necessario conoscere tutti quelli precedenti.

In realtà è possibile trovare una formula, che permetta di calcolare direttamente il termine n-esimo senza conoscere i precedenti. Questa formula è nota come formula di Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Per dimostrare la validità di tale formula si può ricorrere al principio di induzione sul decorso dei valori (anziché "indurre" da n a n + 1 si "induce" da tutti i predecessori di n + 1 a n + 1).

Si verifica immediatamente che, per n = 1, si ha F(1) = 1.

Supponiamo che la proprietà valga per i numeri minori di k + 1 e dimostriamola per k + 1.

Poniamo, per brevità, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Per ipotesi induttiva si ha: $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k)$ e $F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k-1} - b^{k-1})$

.

Quindi:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^k - b^k + a^{k-1} - b^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k-1}(a+1) - b^{k-1}(b+1))$$

.

D'altra parte si ha che:

$$a^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + a$$

e, analogamente: $b^2 = 1 + b$, per cui, sostituendo:

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k-1}a^2 - b^{k-1}b^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^{k+1} - b^{k+1}),$$

E la formula di Binet vale per k + 1.

BIBLIOGRAFIA

BergaminiTtrifone-Barozzi – Manuale blu di matematica- Zanichelli
M.G. Piacentini Cattaneo – Algebra – Zanichelli Decibel
Dispense Combinatorica

SITOGRAFIA

http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Fibonacci
http://www.matematicamente.it/approfondimenti/matematica/la_formula_
http://www.fiibonacci.it/matematicageometria.htm
http://www.itisgiorgi.it/giochi_matematici
http://www.archweb.it/geometrie/sez_aurea_def.htm
http://www.performancetrading.it/AT/fib/fibProprietà.htm
http://www.matmedia.it/Antologia/