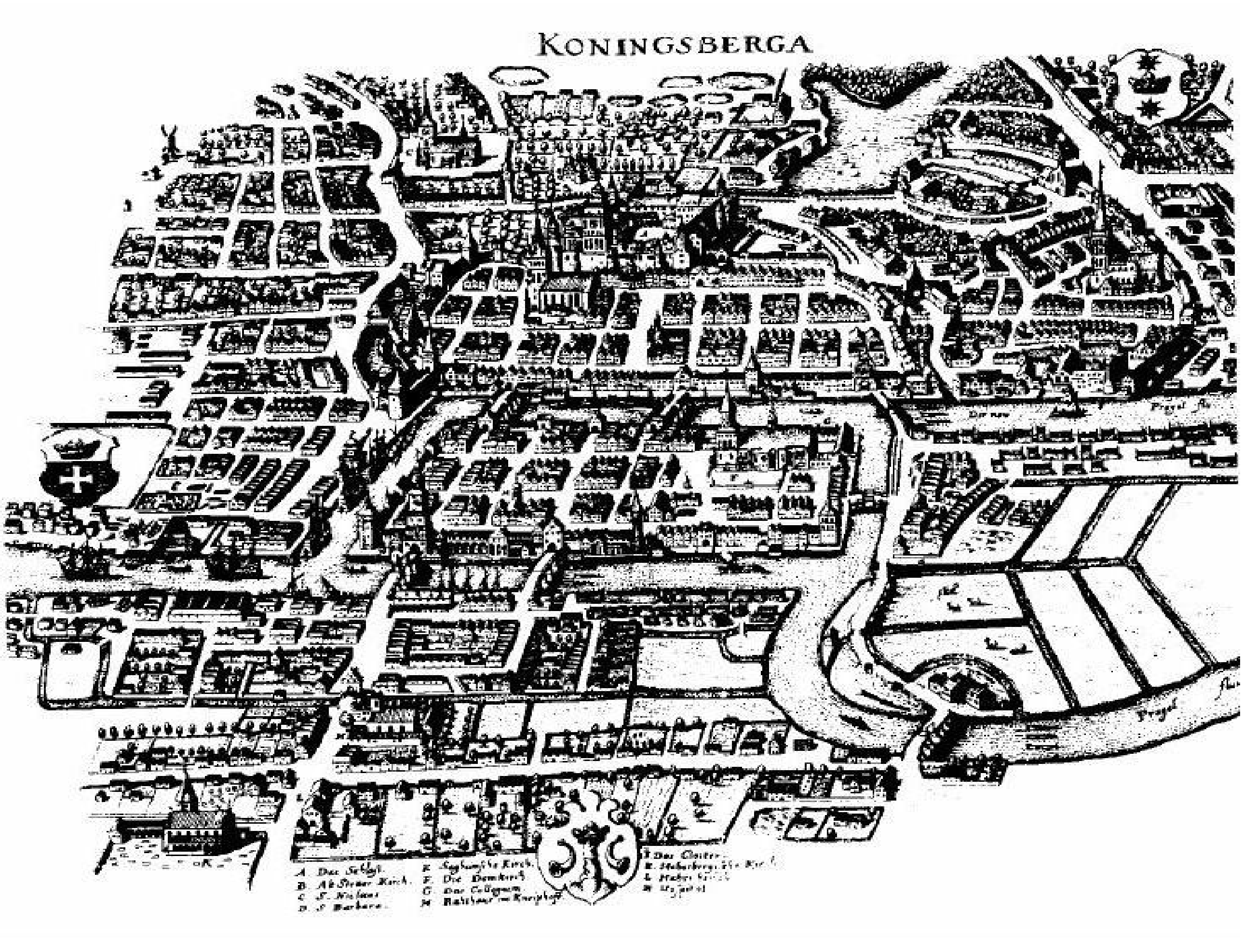
I Sette Ponti di Königsberg

Beniamino Abis

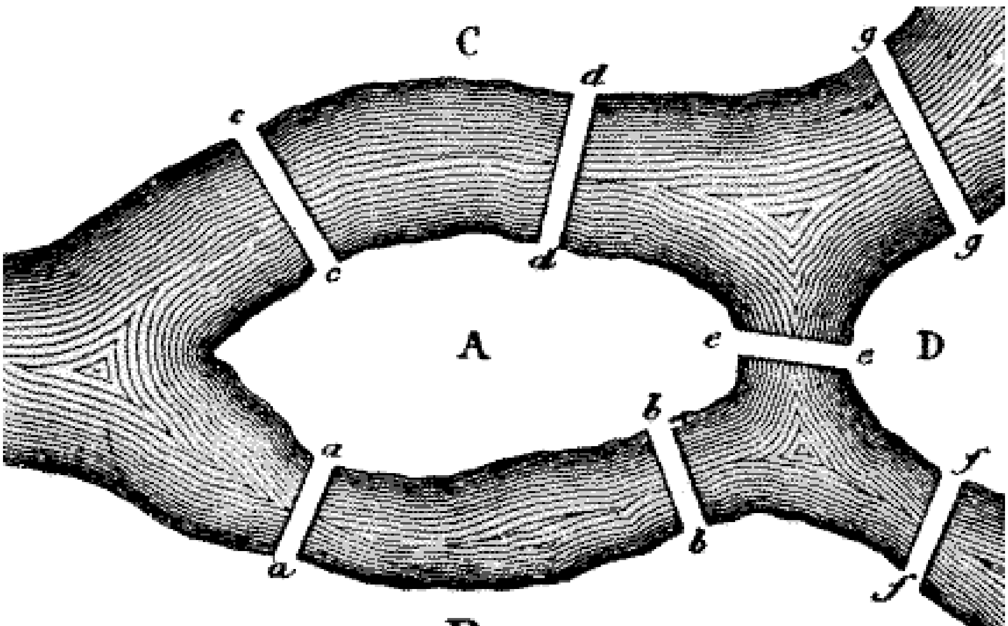
10 Giugno 2008



1 Introduzione

Si narra che gli abitanti di Königsberg - una città della Prussia orientale nota per aver dato i natali a Immanuel Kant (1724-1804) e che oggi col nome di Kaliningrad è una parte del territorio della Repubblica Russa - avessero un problema semplice da enunciare, che però non si riusciva a risolvere, anche se i numerosi tentativi operati facevano propendere per una risposta negativa.
Fu il celebre matematico e fisico svizzero Leonhard Euler, noto come Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 – San Pietroburgo, 18 settembre 1783), a trovare per primo la soluzione a tale quesito. Eulero dimostrò che il problema non era risolubile, fornendo una condizione necessaria di risolubilità per questioni di tale genere.

Ed ecco il problema dei ponti di Königsberg.
La città è attraversata dal fiume Pregel, e un suo quartiere sorge su di un'isola (chiamata *der Kneiphof*) oltre la quale il fiume si spezza in due rami. A quei tempi l'isola era collegata tramite due ponti con ciascuna delle due sponde che il fiume forma prima di suddividersi, mentre la sponda situata dopo la suddivisione del fiume era collegata con un ponte sia con l'isola sia con le sponde citate precedentemente, per un totale di sette ponti.



È chiaro che lungo i ponti della città tedesca si possono compiere delle passeggiate in cui i ponti vengono percorsi l'uno dopo l'altro, facendo seguire ad ogni ponte un altro collegato ad esso tramite l'isola o tramite una sponda. Passeggiate nelle quali un ponte non venga percorso più di una volta sono detti *semplici* (*cammini semplici*). Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere un cammino semplice lungo i ponti della città in modo tale da percorrerli tutti.

Ecco che cosa scrisse Eulero in merito a ciò:

A Königsberg in Prussia c'è un'isola A, chiamata der Kneiphof, e il fiume che la circonda si divide in due rami, come si può vedere in figura; i rami di questo fiume sono muniti di sette ponti a, b, c, d, e, f, g.
Circa questi ponti veniva posta questa domanda, si chiedeva se fosse possibile costruire un percorso in modo da transitare attraverso ciascun ponte una e una sola volta. E mi fu detto che alcuni negavano ed altri dubitavano che ciò si potesse fare, ma nessuno lo dava per certo.
Da ciò io ho tratto questo problema generale: qualunque sia la configurazione e la distribuzione in rami del fiume e qualunque sia il numero dei ponti, si può scoprire se è possibile passare per ogni ponte una ed una sola volta?

Nel seguito della trattazione verrano proposte due soluzioni al problema, una più discorsiva e specifica, e una più generica, entrambe però trattate dallo stesso Eulero nell'opera "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*".

2 La Prima Trattazione di Eulero

Il grande Leonhard scrive che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le passeggiate possibili, così facendo si potrebbe sicuramente trovare il cammino che soddisfa il problema oppure constatare che tale passeggiata non esiste. Egli escluse però subito tale metodo per due motivi.
Primo, perché i percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema. Secondo, perché, così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni di regioni e ponti e per il loro numero.
Allora inventa un altro metodo, che si basa essenzialmente su un modo idoneo di rappresentare i percorsi. Comincia con l'indicare con A, B, C e D le quattro regioni, come si vede nella cartina precedente e con l'indicare con a, b, c, d, e, f, g i sette ponti.
Eulero scrive che se il viaggiatore dovesse partire dalla regione A e, attraverso non importa quale dei ponti a o b, si recasse in B, indicherà il suo percorso con AB; se poi si recasse in D, il nuovo tratto verrebbe indicato con BD e tutto il tragitto con ABD. E se poi andasse da D a C, allora il percorso complessivo sarebbe ABDC. Le quattro lettere ABDC dicono non solo qual è stato il percorso, ma anche che sono stati attraversati tre ponti. In generale, il numero di ponti attraversati è di uno minore del numero di lettere della parola-percorso. Viceversa, se si transita su un certo

numero di ponti, allora il numero di lettere della parola-percorso sarà di uno maggiore di tale numero. Ecco allora la prima considerazione cruciale: il percorso cercato dovrà essere descritto da una parola-percorso di otto lettere - perché i ponti, sui quali si deve passare una sola volta, sono sette - scritta usando solo le lettere A, B, C e D. Quindi anziché cercare il cammino corretto, basterà considerare se esiste o meno una sequenza di lettere, una parola-percorso, tale da soddisfare le richieste, ovvero essere composta da otto lettere e che permetta di passare tutti i ponti.
Eulero prosegue analizzando che cosa può capitare alla lettera A. Se la regione A fosse collegata a un'altra regione con un solo ponte, allora la parola conterrebbe una sola volta la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione. Se la regione A fosse collegata con altre regioni con tre ponti, allora la parola conterrebbe due volte la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione. Se la regione A fosse collegata con altre regioni con cinque ponti, allora la parola conterrebbe tre volte la lettera A, sia che si parta da A sia che si parta da un'altra regione. In generale, se una regione è collegata ad altre con un numero dispari di ponti, la sua lettera apparirà tante volte quanto è la metà di quel numero aumentato di uno(ovvero se il numero di ponti è n il numero di passaggi per tale regione sarà (n+1)/2, sfruttando l'immagine è facile verificare tale regola). A questo punto Leonhard considerò le vie di accesso alle singole regioni e quindi il numero di passaggi per le singole regioni, necessari a percorrere tutti i ponti, in altre parole contò il numero di volte che dovevano ripetersi le lettere maiuscole indicative le quattro regioni per soddisfare le richieste del problema, tenendo presente le osservazioni appena fatte.
La regione A, la *der Kneiphof,* ha cinque vie di accesso, di collegamento con le altre regioni, dunque dovrà ripetersi nella parola-percorso (5+1)/2 volte, ovvero 3;
La regione B, così come anche la C e la D, presenta 3 ponti che la connettono alle rimanenti regioni, e dunque si ripeterà 2 volte. Quindi nella parola-percorso dovranno comparire in totale, affinché tutti le regioni vengano visitate sfruttando tutti i collegamenti, tre A, due B, due C e due D, in totale 3+2+2+2 lettere, cioè 9 lettere, mentre si era affermato che, al fine di passare su un ogni ponte una e una sola volta, ne fossero necessarie solo otto. Da ciò Eulero concluse che tale passeggiata semplice non fosse possibile.
Si noti come all'interno della trattazione siano quasi completamente assenti calcoli di natura complessa, mentre l'intero argomento viene trattato in maniera discorsiva, quasi come se non si stesse ragionando in ambito matematico.

3 La Trattazione Prosegue

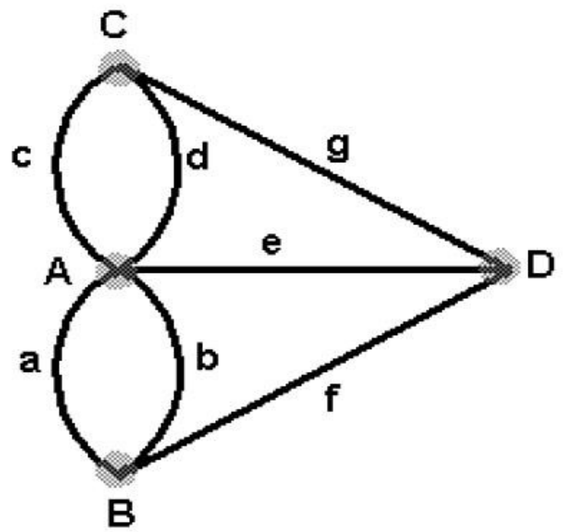
Ma a questo punto Leonhard non si fermò. Egli proseguì la trattazione del problema, generalizzandolo come annunciato in precedenza, a un numero qualunque di regioni, comunque

definite dai rami del fiume, per un numero qualunque di ponti.
Eulero arrivò infine a formulare delle leggi per risolvere tale tipo di problema.
Egli scrisse:

Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola. Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile. Se sono solo due le regioni alle quale conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte. E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.

4 La Risoluzione Tramite Grafo

Il problema dei ponti di Königsberg può essere rappresentato dalla seguente figura.



Una figura di questo tipo, formata da punti nodali (A, B, C, D) e da linee che li congiungono (a, b, c, d, e, f, g), si chiama grafo. I punti A, B, C, D si chiamano nodi. Le linee a, c, d, e, f, g si chiamano archi (o lati o segmenti). Le superfici chiuse limitate da una serie di archi si chiamano regioni. Il numero di archi che escono da un nodo si chiama ordine del nodo. Ad esempio l'ordine del nodo A è 5 mentre l'ordine del nodo D è 3. Quando si dice "nodo pari" o "nodo dispari" si intende rispettivamente "nodo di ordine pari" o "nodo di ordine dispari".

Eulero stabilì che un grafo composto soltanto da nodi pari, cioè ciascuno collegato a un numero pari di archi, è sempre percorribile e che si può ritornare al punto di partenza senza sovrapposizioni di percorso (circuito euleriano). Se un grafo contiene nodi pari e soltanto due nodi dispari è ancora percorribile, partendo da uno dei noti dispari per arrivare all'altro, ma non si può più ritornare al punto di partenza. Se contiene invece più di due nodi dispari, non è percorribile senza sovrapposizioni di percorso.

Analizziamo ora il grafo dei sette ponti di Königsberg, esso presenta ben quattro nodi di ordine dispari, rispettivamente A 5, mentre B, C e D 3, pertanto non risulta percorribile senza sovrapposizioni.

5 Variazioni del Problema

L'enunciato originale del problema concerne vertici non identificati, cioè caratterizzati solo dai loro collegamenti. Vi sono invece variazioni su questo tema che possono essere utili per introdurre il problema nell'insegnamento e che si preoccupano di identificare i vertici del grafo con personaggi e ruoli, in modo da verificare la comprensione dell'argomento mantenendo viva l'attenzione.

Si precisa quindi che sulla riva settentrionale della città sorge lo *Schloß*, castello in tedesco, del principe Blu e che sulla riva meridionale sorge quello del principe Rosso, suo fratello e rivale. Sull'isola orientale vi è la *Kirche*, la chiesa, sede del Vescovo mentre nell'isola centrale si trova una *Gasthaus*, un'osteria, nella quale molti abitanti della città avevano l'abitudine la sera di trattenersi per tentare poi l'impresa chiamata *passare i ponti*, tornando più tardi a festerggiare la riuscita della stessa senza ulteriori dimostrazioni.

Il principe Blu, dopo aver analizzato il sistema dei ponti cittadini con l'aiuto della teoria dei grafi, decide di costruire di nascosto un ottavo ponte che gli permetta la sera di passare i ponti partendo dal suo Schloß e finendo alla Gasthaus dove potersi vantare della sua riuscita e senza permettere al fratello di fare altrettanto a partire dal suo Schloß.

Dove costruisce l'ottavo ponte il principe Blu?

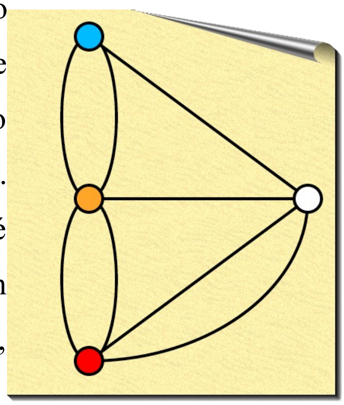
Il principe Rosso, imbufalito per la mossa del fratello, dopo aver studiato la teoria dei grafi decide di costruire di nascosto un altro ponte che consenta a lui di traversare i ponti in modo di raggiungere dal suo Schloß la Gasthaus e qui prendere per i fondelli il fratello al quale diventa impossibile passare i ponti alla sua maniera.

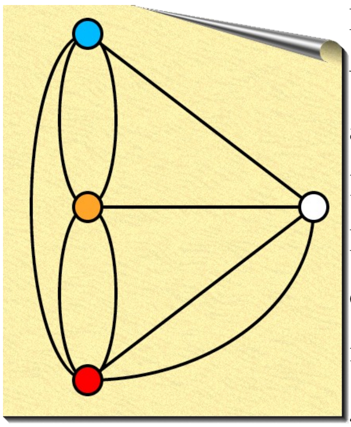
Dove costruisce il nono ponte il principe Rosso?

Il Vescovo ha dovuto assistere alla dispendiosa contesa cittadina con crescente irritazione. Essa ha portato alla formazione di due facinorose fazioni e ha fatto crescere il numero degli eccessivi

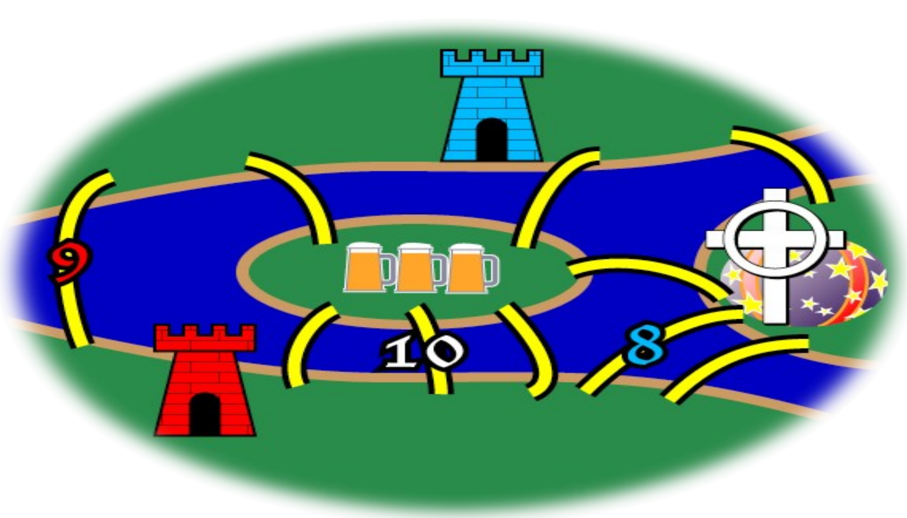
frequentatori della Gasthaus, con danno della quiete pubblica. Quindi anche lui, dopo un accurato studio della teoria dei grafi, decide di costruire un decimo ponte che consenta a tutti i cittadini di passare tutti i ponti e fare ritorno alla propria casa tra i tranquilli affetti familiari.
Dove costruisce il decimo ponte il Vescovo?

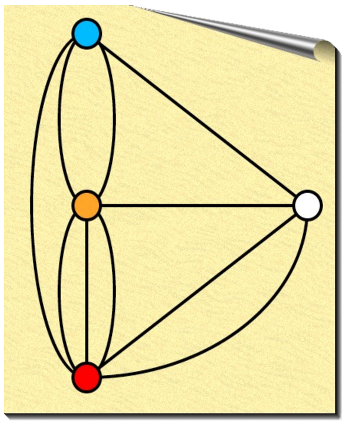
Ecco qui di seguito la risoluzione del problema.
Le passeggiate semplici sono possibili se esattamente 2 nodi posseggono un numero dispari di spigoli, che sono esattamente i nodi iniziale e finale della passeggiata. Poiché il problema presenta solo 4 nodi, tutti con grado dispari, la passeggiata inizia nel nodo blu e termina nel nodo arancione. Bisogna quindi disegnare un nuovo spigolo fra gli altri due nodi. Poiché hanno formalmente un numero dispari di spigoli, bisogna creare un numero pari di spigoli in tutti i nodi che non siano quello iniziale e finale, come mostrato in figura.





Per costruire il nono ponte la soluzione è semplice: si richiede di utilizzare il nodo rosso come punto di partenza e l'arancione come arrivo. Per cambiare la parità dei nodi rosso e blu basta inserire un altro lato tra i due, come mostrato in figura.
Infine il Vescovo vuole che ogni cittadino ritorni al punto di partenza, ovvero vuole creare un cammino euleriano, che richiede la parità di tutti i nodi. Dopo la soluzione del nono ponte i nodi rosso e arancione sono di grado dispari quindi devono essere cambiati aggiungendo un nuovo arco fra di loro. La situazione finale sarà quindi quella delle due immagiin mostrate.





6 Collegamenti

Utilizzando la seguente procedura è possibile prendere visione del testo originale, in latino, di Eulero "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*":

- accedere alla pagina http://www.math.dartmouth.edu/~euler/
- cliccare su "Subject" nella colonna a sinistra;
- cliccare su "Combinatorics & Probability" nella tabella "Mathematics";
- alla prima voce della tabella cliccare su "53";
- scorrere fino a giungere alla sezione "Documents Avaible";
- cliccare su "E053";
- buona visione.

Mentre utilizzando questo link è possibile prendere visione della zona dei sette ponti di Konigsberg, l'attuale Kaliningrad, attraverso Google Maps: http://maps.google.com/maps?q=http://bbs.keyhole.com/ubb/download.php?Number=887996&t=k&om=1 .

7 Bibliografia e Sitografia

- Giorgio Manini, "*Bollettino dei docenti di matematica*", Divisione della Scuola e Centro didattico cantonale del Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport della Repubblica e Cantone Ticino, 2007;
- Leonhard Euler, "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*", Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1741, pp. 128-140 ;

- Wikipedia: http://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_ponti_di_K%C3%B6nigsberg ;
- Wikipedia: http://it.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler ;
- Wikipedia: http://it.wikipedia.org/wiki/Glossario_di_teoria_dei_grafi ;
- The Euler Archive: http://www.math.dartmouth.edu/~euler/ ;
- Euler's Konigsber's Bridges Problem: http://www.contracosta.cc.ca.us/math/Konig.htm ;
- Math Forum: http://mathforum.org/isaac/problems/bridges1.html ;
- Konigsberg: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Miscellaneous/Konigsberg.html ;
- Google Maps: http://maps.google.com/maps?q=http://bbs.keyhole.com/ubb/download.php?Number=887996&t=k&om=1 .